Temas teóricos Electromagnetismo

Teorema de Helmholtz.

Lino Spagnolo

La teoría electromagnética de Maxwell, e incluso las modernas elaboraciones como la electrodinámica cuántica y la cromo dinámica, utilizan la teoría del campo para definir la estructura de las variables físicas electromagnéticas. De ahí que se utilicen más los conceptos de campo electromagnético, densidades de corrientes y densidades de carga eléctrica en lugar de los parámetros de la teoría de circuitos, como corriente, tensión, potencia, resistencia, inductancia, etc.

Los campos se clasifican en escalares, vectoriales y tensoriales. Son funciones espaciales, y pueden o no ser también funciones del tiempo. Su utilización primordial es para describir las propiedades físicas de las entidades como campo eléctrico o magnético de modo tal que resulten independientes de las transformaciones de coordenadas. Esta última característica es esencial para adoptar la teoría de campos y al mismo tiempo restringe la forma en que se transforman bajo una traslación y/o una rotación.

Sin necesidad de profundizar estas nociones, descriptas en los textos de Análisis Vectorial, pueden enumerarse algunas características:

La carga eléctrica Q es un campo escalar propio definido por una única cantidad, (notar que la expresión "impropio", como opuesto a "propio", significa seudo escalar, o sea una magnitud escalar que cambia de signo ante una inversión de coordenadas).

El campo eléctrico tridimensional $\vec{E}$ es una magnitud vectorial propia definida por tres componentes espaciales y eventualmente por una temporal adicional.

El campo magnético tridimensional $\vec{B}$ es una magnitud vectorial impropia definida por tres componentes espaciales y eventualmente por una temporal adicional. Esto significa que el campo $\vec{B}$ es seudo vectorial.

Se ha visto que las ecuaciones de Maxwell definidas para campos estáticos o cuasi-estáticos, se reducen a:

$$\vec{E} \to \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_o} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases} \qquad \vec{B} \to \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} \end{cases} \tag{01}$$

Estas ecuaciones sugieren que si se conocen las fuentes de campos, o sea, la divergencia y el rotor de un campo vectorial, se podrá conocer todo respecto a dicho campo. ***En efecto, el Teorema de Helmholtz sostiene precisamente que un campo vectorial $\vec{F}$, con la condición de ser finito, uniforme y continuo y que además se anule en el infinito, puede ser expresado como la suma del gradiente de una función potencial Ψ y el rotor de un campo de potencial vectorial $\vec{K}$ de divergencia nula.*** (Fórmula 04).

En el desarrollo de la teoría se suponen conocidas aquellas variables físicas que de forma causal dan lugar a la existencia de dichos campos, que se denominan precisamente ***fuentes de campo*** ρ y $\vec{J}$, tal como se ve en la fórmula (01).

Campos escalares.

Las ecuaciones de campo son generalmente diferenciales: ellas nos informan de las diferencias infinitesimales entre el valor del campo en un punto respecto a su valor en los puntos vecinos. Para ello debemos saber qué ecuación diferencial especifica a un campo escalar.

Si la función escalar de punto la llamaos $\phi(r)$, entonces su gradiente nos define un campo vectorial tal que $\vec{A}(r) = \nabla\phi(r)$ con la propiedad de cumplir su auto consistencia : $\nabla\times\vec{A}=0.$

De esta forma, si se conoce el campo escalar $\phi(r)$ en un punto P, para otro punto Q genérico perteneciente al mismo espacio, queda definido su valor a través de la ecuación integral:

$$\phi(Q)=\phi(P)+\int_P^Q \vec{A}\cdot d\vec{l} \tag{02}$$

Y dado que $\nabla\times\vec{A}=0$ garantiza que $\vec{A}$ es un campo conservativo por lo cual la ecuación integral define de forma unívoca el valor del campo en cualquier punto Q.

Campos vectoriales.

Para los campos vectoriales hacen falta más condiciones para su completa definición. Tal como demostrará el teorema de Helmholtz, hacen falta 2 ecuaciones diferenciales para su definición.

El teorema de Helmholtz dice concretamente que:
Cuando se conocen las fuentes escalares (densidad de carga eléctrica, por ejemplo) y las fuentes vectoriales (densidad de corriente, como ejemplo), correspondiente a la divergencia del campo vectorial $\vec{F}$ y a su rotor, respectivamente (según fórmulas 03), dicho campo queda determinado a menos de un gradiente de de una función escalar $f(r)$ tal que: $\nabla\cdot\nabla f(r)=0,$ y que no afecta al valor del campo $\vec{F}$.

Imponiendo la condición de que las dos fuentes se anulen en el infinito y que el campo vectorial $\vec{F}$ decrezca de forma de anularse cuando $r\longrightarrow\infty,$ se define:

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{F}=\lambda(r) & \textit{fuente escalar}\\ \nabla\times\vec{F}=\vec{k}(r) & \textit{fuente vectorial}\end{cases} \tag{03}$$

Entonces el teorema de Helholtz demostrará que el campo vectorial $\vec{F}$ es la suma de:

$$\boxed{\vec{F}(r)=-\nabla\Psi(r)+\nabla\times\vec{K}(r)} \tag{04}$$

En la cual los potenciales escalares $\Psi(r)$ y vectoriales $\vec{K}(r)$ son los definidos en la teoría electromagnética.

$$\Psi(r) = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv' \;;\; \vec{K}(r) = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\vec{k}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv' \qquad (05)$$

Entonces la función vectorial $\vec{F}$ satisfará las ecuaciones (03).

Demostración del teorema de Helmholtz.

De acuerdo con la hipótesis que $\vec{F} = -\nabla\Psi + \nabla\times\vec{K}$ efectuaremos los siguientes cálculos:

Se calculará la divergencia: Tener en cuenta que siempre: $\nabla\cdot\nabla\times\vec{K}$

$$\therefore\; \nabla\cdot\vec{F} = -\nabla\cdot\nabla\Psi = -\nabla^2\Psi \;\;\therefore\; \boxed{\nabla^2\Psi(r) = -\lambda(r)} \qquad (06)$$

Y dado que su divergencia es uno de los datos del problema, la primera parte queda demostrada a través de la ecuación diferencial escalar de Poisson cuya solución es la función potencial:

$$\boxed{\Psi(r) = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv'} \qquad (07)$$

Que será finalmente el potencial escalar $\phi(r) = V(r)$. El cual formará parte del vector $\vec{F}(r)$ como su elemento gradiente $-\nabla\Psi(r)$.

Luego se calculará su rotor: Tener en cuenta que siempre: $\nabla\times\nabla\Psi(r) = 0$

$$\nabla\times\vec{F}(r) = -\nabla\times\nabla\Psi(r) + \nabla\times(\nabla\times\vec{K}(r))$$

O sea:

$$\therefore\; \boxed{\nabla\times\vec{F}(r) = \nabla\times(\nabla\times\vec{K}(r)) = \nabla(\nabla\cdot\vec{K}) - \nabla^2\vec{K}} \qquad (08)$$

Esta ecuación diferencial es bastante complicada, una simplificación consiste en anular la divergencia $\nabla\cdot\vec{K} = 0$, esta condición se conoce como condición de Gauge dentro del electromagnetismo, o también como condición de Coulomb.
Quedando en consecuencia:

$$\nabla\times\vec{F} = \vec{k}(r) = -\nabla^2\vec{K} \;\;\therefore\; \boxed{\nabla^2\vec{K} = -\vec{k}(r) = -(k_1\hat{e}_x + k_2\hat{e}_y + k_3\hat{e}_z)} \quad (09)$$

Que constituye la otra ecuación diferencial vectorial de Poisson cuya solución es el potencial vectorial magnético:

$$\boxed{\vec{K}(r)=\frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\vec{k}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv'} \tag{10}$$

Que también será el potencial vectorial magnético del cual se obtiene la inducción magnética $\vec{B}(r)=\nabla\times\vec{A}(r)$ y la carga será el campo vectorial $\vec{k}(\vec{r}\,')=\vec{J}(r')$. La cual forma parte del vector $\vec{F}(r)$ como su elemento rotor $\nabla\times\vec{K}(r)$.

Con lo cual queda probada la ecuación $\boxed{\vec{F}(r)=-\nabla\Psi(r)+\nabla\times\vec{K}(r)}$ puesto que ambos valores $\Psi(r)$ y $\vec{K}(r)$ se obtienen de las ecuaciones (07) y (10) y además se demostró que tanto $\nabla\cdot\vec{F}$ como el $\nabla\times\vec{F}$ conducen a los datos de partida.
Quedando pendiente la siguiente demostración:

<u>Demostración que los potenciales $\Psi(r)$ y $\vec{K}(r)$ son solución de la ecuación $\vec{F}(r)=-\nabla\Psi(r)+\nabla\times\vec{K}(r)$, y a su vez esos potenciales son solución de la ecuación de Poisson.</u>

Comenzaremos por demostrar que el potencial $\Psi(r)=\frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv'$ es solución de la ecuación (07).. Para ello se calcula la Divergencia de $\vec{F}(r)$:

$$\nabla\cdot\vec{F}(r)=-\nabla\cdot\nabla\Psi(r)=-\frac{1}{4\pi}\int_v \nabla^2\left(\frac{\lambda(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dv' \tag{11}$$

Dado que la carga $\lambda(\vec{r}\,')$ es un escalar constante para el entorno espacial de $\vec{r}\,'$, reducimos la integral anterior a:

$$\nabla^2\Psi(r)=-\frac{\lambda(\vec{r}\,')}{4\pi}\int_v \nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dv' \tag{12}$$

En la cual sólo debemos evaluar la integral $\int_v \nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dv'$ (13)

en todo el espacio.

La resolución de esta integral en cualquier lugar del espacio da un resultado nulo. Sin embargo, como sabemos por la Ley de Maxwell, al evaluar la divergencia en el lugar físico en que se encuentra la carga q , o su densidad volumétrica ρ_v, su valor es $\dfrac{\rho}{\varepsilon_o}$.

Esta aparente contradicción se debe a que en el entorno de $\vec{r} = \vec{r}\,'$ el valor de la función $(\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|})$ tiende a infinito.

Existen diversas técnicas para evitar esa indefinición, pero desde un aspecto matemáticamente afín al concepto de carga puntual, nos parece que la herramienta conocida como delta de Dirac, o función impulso de la electrónica aplicada, sea la aproximación más adecuada a la solución.

Recordemos que la definición del operador, o delta de Dirac, era una ***función*** $\delta(x-x')$ tal que su integral daba:

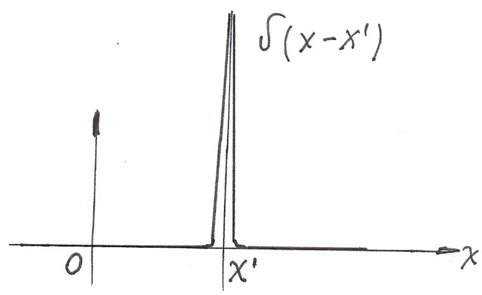
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).\delta(x-x').dx = \varphi(x')} \qquad (14)$$

Esta integral asigna a la función $\varphi(x)$ el valor de $\varphi(x')$.

De tal forma que, si por ejemplo, $\varphi(x)=1$ entonces $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x').dx = 1}$ (15)

Una definición más informal del operador o símbolo $\delta(x-x')$ se da a través de las propiedades:

$$\delta(x-x')\begin{cases} =0 \;\; para\ todo\ x \neq x' \\ =\infty \;\; para\ x = x' \end{cases} \qquad (16)$$



Es importante, en el uso de la delta, que deba ser tomada siempre como un operador, particularmente <u>siempre bajo el signo integral</u>, y no como una función analítica.

Permite ser utilizada con expresiones vectoriales y en integrales volumétricas, de superficie y lineales, siempre que se incluya en la integral el punto $x = x'\ o\ \vec{r} = \vec{r}\,'$.

Para una integral de volumen se tiene: $\int_v \varphi(\vec{r}).\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,dv = \varphi(\vec{r}\,')$ (17)

Existen muchas funciones con las propiedades de la delta de Dirac, pero para el electromagnetismo es importante considerar la función $-\int_v \nabla^2(\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|})\,dv'$ (13)

con tales propiedades.

Aplicando el teorema de la divergencia a la expresión (13):

$$-\int_{v'} \nabla.\nabla(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|})\,dv' = -\oiint_{S'} \vec{\nabla}(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|})\cdot d\vec{S}\,' = \oiint_{S'} (\frac{\hat{r}-\hat{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2})\cdot d\vec{S}\,' \quad (18)$$

Pero observando que $(\hat{r}-\hat{r}\,')\cdot d\vec{S} = dS$, es el producto escalar de los versores que señalan la dirección radial junto al elemento normal de la superficie esférica que envuelve todo el volumen v', el resultado es un producto simple que puede combinarse con la expresión del esterarían:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{dS}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}$$

Con lo cual, reemplazando: $\boxed{\oiint_{S'} (\frac{\hat{r}-\hat{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2})\cdot d\vec{S}\,' = \oiint_{S'} d\Omega = 4\pi}$ (19)

O sea, con esto se demuestra la equivalencia con la función de delta de Dirac:

$$\boxed{-\nabla^2(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}) = 4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')} \quad (20)$$

Y por lo tanto el valor de la integral, tomada en en un punto que incluye la carga puntual $q \rightarrow \rho$, equivale a utilizar la ecuación (17):

$$\nabla\cdot\vec{F}(r) = -\nabla\cdot\nabla\Psi(r) = -\frac{1}{4\pi}\int_v \lambda(\vec{r})\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dv' = \frac{\lambda(r')}{4\pi}$$

Y será equivalente a utilizar la delta de Dirac $\int_v \varphi(\vec{r}).\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,dv = \varphi(\vec{r}\,')$

o el funcional $-\frac{1}{4\pi}\int_v \varphi(\vec{r})\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dv' = \varphi(\vec{r}\,')$. (20')

<u>De aplicar estos resultados al campo electrostático</u> pondremos el campo vectorial $\vec{F} \rightarrow \vec{E}$ cuyas respectivas fuentes son: $\begin{cases} \nabla\cdot\vec{F} = \nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_o} \\ \nabla\times\vec{F} = \nabla\times\vec{E} = 0 \end{cases}$ (21)

Por lo cual, según la ecuación (06) esto equivale a:

$$\nabla\cdot\vec{F}=-\nabla\cdot\nabla\Psi=-\nabla^2\Psi\ \ \therefore\ \ \nabla^2\Psi(r)=-\lambda(r)$$

$$\vec{E}(r)=-\nabla\phi(r)\ \therefore\ \nabla\cdot\vec{E}(r)=-\nabla^2\phi(r)=\frac{\rho(r)}{\varepsilon_o} \qquad (22)$$

Reemplazando en (07):

$$\phi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_v\frac{\rho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv'\rightarrow\boxed{\vec{E}(r)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_v\nabla\left(\frac{\rho(r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dv'} \qquad (23)$$

O sea:

$$\nabla\cdot\vec{E}=-\frac{1}{4\pi}\int_v\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_o}\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dv'=\int_v\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_o}.\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,dv'=\frac{\rho(r')}{\varepsilon_o} \quad (24)$$

Con lo cual queda demostrada la primera fórmula de (12).

<u>De igual forma se pueden aplicar los resultados</u> (20) o (20') para demostrar que el potencial $\vec{K}(r)=\frac{1}{4\pi}\int_v\frac{\vec{k}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv'$ es solución de la ecuación de la ecuación $\vec{F}(r)=-\nabla\Psi(r)+\nabla\times\vec{K}(r)$.

Para ello bastará tomar el rotor de $\nabla\times\vec{F}(r)=\nabla\times\left(\nabla\times\vec{K}(r)\right)$. (25)

<u>Y aplicarlo para el caso del magnetismo</u> donde $\vec{K}(r)$ equivale al potencial vectorial magnético que corresponde a la ecuación de Poisson: $\boxed{\nabla^2\vec{A}=-\mu_o\vec{J}}$ (26)

Ahora el campo vectorial $\vec{F}\longrightarrow\vec{B}$ equivale al campo magnético cuyas fuentes son:

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{F}=\nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{F}=\nabla\times\vec{B}=\mu_o\vec{J}\end{cases} \qquad (27)$$

Pero como según se desprende de $\nabla\cdot\vec{B}=0\rightarrow\ \vec{B}(r)=\nabla\times\vec{A}(r)$ por lo tanto:

$$\nabla\times\vec{B}(r)=\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu_o\vec{J} \qquad (28)$$

Para simplificar la ecuación diferencial se adopta la condición de Gauge:

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

Y por lo tanto se obtiene la ecuación de Poisson, cuya solución es la fórmula (05):

$$\boxed{\vec{K}(r)=\frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\vec{k}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv'}$$

O la fórmula del potencial vectorial magnético:

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu_o\vec{J};\quad \vec{A}(r)=\frac{\mu_o}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv' \tag{29}$$

Nuevamente la densidad vectorial $\vec{J}(\vec{r})$ es constante para el entorno del punto, por lo que puede ponerse:

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{F}(r)&=\nabla\times(\nabla\times\vec{K}(r))=\nabla(\nabla\cdot\vec{K})-\nabla^2\vec{K}=-\nabla^2\vec{A}(r)\\ \nabla\times\vec{A}(r)&=\nabla^2\vec{A}(r)=-\frac{\mu_o\vec{J}(\vec{r})}{4\pi}\int_v\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dv'\end{aligned} \tag{30}$$

Llegando a la misma expresión que para el potencial escalar.

$$\nabla\cdot\vec{F}(r)=-\frac{\lambda(\vec{r}\,')}{4\pi}\int_v\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dv'$$

De lo cual deducimos que también la ecuación (05), y su consecuencia, la ecuación (30), es solución de la ecuación de Poisson.