Revisión de temas Electromagnéticos.

Lino Spagnolo.

(Tomadas de los autores: J. Jackson, J. Stratton, E. Fermi y W. Panofsky)

Alrededor del año 1960 hubo una auténtica revolución en la comprensión de las fuerzas de la naturaleza: la fuerza fuerte en el interior del núcleo del átomo, la fuerza débil en los procesos de desintegración o decaimiento, la fuerza electromagnética en las interacciones entre el núcleo atómico y los electrones o entre cualquier conjunto de cargas eléctricas y la fuerza gravitatoria que actúa entre las masas, desde las atómicas hasta las intergalácticas. También se profundizó en el conocimiento de la composición de la materia y en otras ramas de la ciencia como la biología y la química.

En los años 90 la Electrodinámica, juntamente con la Teoría Standard, se convierte en el sector científico que mejor describe las características e interacciones de las partículas elementales. Es la época en que se describe con precisión como las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas, basadas en sus constituyentes, quarks y leptones, actúan a través de sus mediadores de fuerza, que son respectivamente los gluones, bosones W y Z, y los fotones.

El esquema teórico que unifica estas dos teorías se fundamenta en los principios de la invariancia gauge de las fuerzas, y en las simetrías discretas de las propiedades de las partículas.

En el Modelo Standard, la Electrodinámica Clásica es un límite con la Electrodinámica Cuántica (llamada brevemente QED), que toma preeminencia para los valores pequeños de: el impulso, la energía de intercambio y con la presencia de grandes cantidades de fotones virtuales o reales.

Luego del Big Bang las interacciones electromagnéticas y las interacciones débiles eran un continuo y los mediadores eran de masa nula, como en el caso de los fotones. Posteriormente (millones de años luego del Big Bang) ocurrió el fenómeno de la rotura espontánea de la simetría y las dos fuerzas se diferenciaron, por un lado la fuerza débil y por el otro la electromagnética.

La QED es la teoría unificada que trata ambas fuerzas. Con el fotón como portador de la fuerza electromagnética (Ley de Coulomb) y un radio de acción prácticamente infinito. Mientras que con la fuerza débil o de baja energía, aparecen dos portadores de la misma; con un radio de acción muy pequeño del orden de $2.10^{-18}\,m$, y que adquieren masas del orden de $80\ a\ 90\ \frac{GeV}{c^2}$. La teoría unificada QED demuestra que el radio de acción y la intensidad de la interacción débil están ligados a través de la constante de estructura fina $\alpha \approx \frac{1}{137}$.

El Modelo Standard, junto con la Teoría de la Relatividad General, proporciona una descripción muy precisa de los fenómenos de la naturaleza en sus aspectos que van desde el interior del núcleo, la nano y microelectrónica, a los fenómenos cotidianos vinculados a los teléfonos celulares, microcomputadoras, redes de comunicación, radares, etc.

No obstante la Mecánica Clásica y la Electrodinámica Clásica fueron los progenitores para la comprensión global actual y continúan desempeñando un rol fundamental en la vida práctica, en las tareas de investigación teórica y en los laboratorios de investigación.

Notas acerca de las ecuaciones de Maxwell.

De las propiedades integrales de los campos eléctricos y magnéticos se pueden deducir las ecuaciones diferenciales de Maxwell. Desde un punto de vista pedagógico, las expresiones diferenciales de las leyes de Maxwell, siempre han resultado más simples de comprender que las expresiones integrales, si bien las ecuaciones integrales son más sencillas de utilizar para el cálculo numérico o para el cálculo con medios computarizados.

$I)$: **<u>Flujo del campo eléctrico o de la inducción eléctrica. Ley de Gauss</u>**.

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{D} \cdot \hat{n}\, dS = \int_v \nabla \cdot \vec{D}\, dv = \int_v \rho\, dv = Q_T$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{in} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{in}}{\varepsilon}$$

Si en una región existen cargas eléctricas puntuales Q_i o una densidad de cargas ρ en un volumen finito, se calcula el valor del campo eléctrico $\vec{E}$ o de la densidad de flujo eléctrico $\vec{D}$ en cada elemento de la superficie que rodea la carga, y luego es posible calcular su flujo a través de la superficie.

$$\Phi_e = \sum_{\Delta S} \vec{D} \cdot \hat{n} \quad \text{o con la integral:} \quad \Phi_e = \oiint_S \vec{D} \cdot \hat{n}\, dS = \oiint_S \varepsilon \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS$$

La propiedad integral que caracteriza al flujo de inducción eléctrico se halla en base al teorema de Faraday, según el cual, si una superficie metálica rodea completamente una cierta carga en su interior, se induce en la cara interior de la superficie conductora una carga igual y de signo opuesto a la contenida.
(Esto ocurre con cualquier superficie, pero el caso de la superficie metálica es pedagógicamente más clara para el alumno).

Como esa carga es proporcional al flujo del vector densidad de inducción eléctrica $\vec{D}$ a través de la misma superficie, se obtendrá, vía la Ley de Gauss, el valor:

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{D} \cdot \hat{n}\, dS = \int_v \nabla \cdot \vec{D}\, dv = \int_v \rho_{in} dv = Q_T \quad \text{Carga total contenida.}$$

De la cual se deduce la ecuación diferencial: $\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{in} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{in}}{\varepsilon}}$

$II)$: **Trabajo o circulación del campo electrostático.**

La propiedad integral del campo electrostático $\vec{E}$ se obtiene a partir de la Ley de Faraday, según la misma, el trabajo de la fuerza necesaria para mover una carga unitaria $q \ (\vec{F} = q\vec{E})$, por un camino cerrado, en un medio en que existe una distribución de cargas eléctricas, es nulo.

Es decir, al ser la carga unitaria

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \ \therefore \ \boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

la integral es tanto de la fuerza como del campo:

Esto significa que el campo eléctrico existente en esas condiciones es conservativo y que se deriva de una función potencial que depende de las coordenadas.

$$\therefore \ \vec{E} = -\nabla V \quad o \ sea: \ \boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

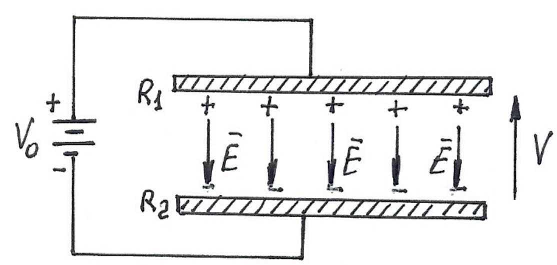
Si la circulación en lugar de realizarse en un circuito cerrado se efectúa entre dos puntos $R_1 - R_2$ la integral curvilínea será:

$$\int_{R1}^{R2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{R1}^{R2} \nabla V \cdot d\vec{l} = -(V_{R2} - V_{R1}) = V_{R1} - V_{R2}$$

Esta ecuación nos señala que el trabajo de la fuerza eléctrica para mover la unidad de carga entre dos puntos es igual a la diferencia de potencial entre los mismos. El signo negativo de la diferencia de potencial se debe a que el potencial crece de $R_1 \ a \ R_2$, mientras que el campo eléctrico crece en el sentido contrario.

$$\boxed{-\int_{R1}^{R2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_{R2} - V_{R1}}$$

El camino señala una disminución del potencial.



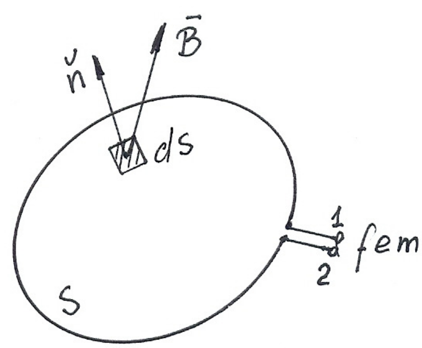
Los valores de $V_{R1} - V_{R2}$ representan la diferencia de energía potencial (o potencial, por tratarse de la unidad de carga) entre $R_2 \ y \ R_1$, o sea, la circulación se realizó entre un punto de energía potencial mayor a otro de energía potencial menor. La circulación del campo eléctrico se denomina diferencia de potencial o fuerza electromotriz, siendo su expresión:

$$e = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(V_{R2} - V_{R1})$$

$II')$ y $III)$: **Flujo del campo magnético y Ley de Faraday.**

Supongamos que junto al campo eléctrico $\vec{E}$ también existe un campo magnético $\vec{H}$, o un campo de inducción magnética $\vec{B}$. En estas condiciones los fenómenos eléctricos y magnéticos cambian fundamentalmente. Además debe considerarse como casos diferentes aquellos en que $\vec{B}$ es uniforme y constante en el tiempo de los casos en que $\vec{B}$ es variable en el tiempo.

En la figura se muestra una espira de alambre conductor que encierra una superficie S.
Si a través de esa superficie pasan líneas de fuerza de un campo $\vec{B}$ variable en el tiempo; el flujo del campo $\vec{B}$ a través de la superficie S vale, por definición de flujo:



$$\Phi_B = \iint_s \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS$$

Si $\vec{B}$ es variable en el tiempo, el flujo del campo a través de la superficie encerrada por la espira varía; en tal caso se comprueba experimentalmente (Ley de Faraday) que aparecerá en los bornes $1-2$ de la espira una fuerza electromotriz (o voltaje) de valor:

$$fem = e = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Cuyo módulo será proporcional a la velocidad de variación del flujo.

Si la espira se cierra a través de una resistencia u otro tipo de carga, circulará una corriente eléctrica. Pero Maxwell generalizó este concepto señalando que para un circuito cualquiera, dentro del campo magnético variable, para que haya movimiento de cargas eléctricas debe haber un campo eléctrico que punto a punto, a lo largo del camino, efectúe el trabajo para transportarlas. Por tal motivo, si no hay un conductor presente en los puntos anteriores, de igual manera se generará un campo eléctrico puntual variable a lo largo de todo el circuito virtual.

Como consecuencia de lo anterior, la circulación de $\vec{E}$ a lo largo de un camino provocará la aparición de una fuerza electromotriz (o voltaje) que se podrá combinar con la deducida en el párrafo $II)$:

$$\boxed{fem = e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}$$

Es decir, el trabajo del campo eléctrico a lo largo de un camino cualquiera C, equivale a la variación del flujo del campo $\vec{B}$ a través de la superficie limitada por la curva C. **Esta es la Ley de Faraday.**

Una diferencia importante se tiene al considerar el flujo a través de una superficie. En el caso descripto mediante la Ley de Faraday, la superficie S es abierta y la curva que la contiene es cerrada.
Supongamos ahora que se toma una superficie cerrada, como en el caso de una esfera; ahora ya no hay un camino que constituya un borde C, más bien, el borde no existe más, y la ecuación:

$$e = \oint_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

La fuerza electromotriz se anula con lo cual también se anula el flujo:

$$\oint_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Aplicando la Ley de Gauss:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_v \nabla \cdot \vec{B}\, dv = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

Esta constituye otra de las Leyes diferenciales de Maxwell, las características del campo magnético es la tener líneas de fuerza cerradas, o sea, ser un campo solenoidal. La propiedad importante de los campos solenoidales es que su divergencia es nula.
Se demuestra también que admiten como origen un campo potencial vectorial $\vec{A}$ tal que:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Otra ecuación diferencial de Maxwell se obtiene considerando la ecuación:

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Y aplicando el teorema de Stokes a la primera integral se obtiene la Ecuación diferencial de la Ley de Faraday.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

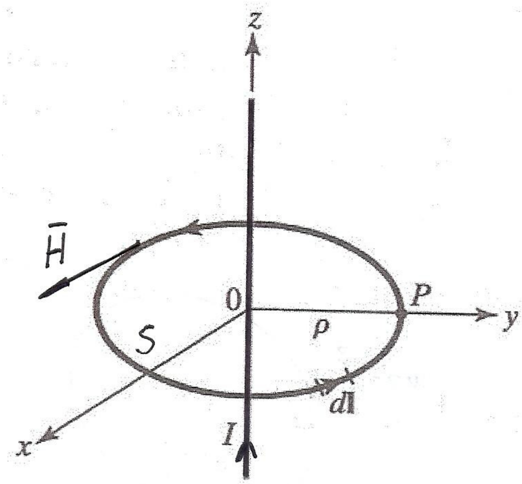
$$\therefore \quad \boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$IV)$: **Circulación del campo magnético. Ley de Ampère.**

El movimiento de cargas eléctricas por un conductor (corriente eléctrica) constituye otro de los fenómenos a considerar.

Como se ve en la figura, hay un conductor de longitud infinita por el cual circula una corriente I.

Experimentalmente se detectó que la misma produce un campo magnético a su alrededor, con líneas de campo cerradas tal como corresponde a los campos solenoidales.



La Ley experimental de Ampère estipula que la circulación del campo magnético $\vec{H}$ alrededor de la curva cerrada que encierra la superficie S , es proporcional a la intensidad de la corriente que atraviesa la superficie.

Su valor está dado por la Ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \iint_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} \qquad \text{(IV-01)}$$

En la cual $\vec{J}_c$ es el campo vectorial densidad de corriente: equivalente a la corriente de conducción por unidad de superficie.

La fórmula anterior es válida tanto para corrientes continuas como variables con el tiempo como las alternas. Sin embargo debe procederse con cuidado. Cuando en un circuito de corriente continua, o cuasi estática, se intercala un capacitor cuyo dieléctrico, por ser no conductor como el caso de la cerámica, interrumpirá la corriente; sin embargo la misma se mantiene a través de una carga del capacitor o de una carga y descarga en caso de la corriente variable**.** Maxwell postuló que había una “corriente de desplazamiento” en el interior del dieléctrico debido a una posible reorientación que sufren las cargas en el dieléctrico con la aparición de un campo eléctrico.

Si el dieléctrico fuese el vacío, donde no hay cagas eléctricas, la corriente de desplazamiento existe igualmente y su explicación es la más ajustada al modelo real.

Maxwell propuso una continuidad circuital de corrientes considerando la corriente en el conductor I_c más una corriente de desplazamiento I_D en el interior del dieléctrico. De modo que la corriente total sería:

$I = I_c + I_D$ o con las densidades de corrientes: $\vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_D$

En realidad la idea central de Maxwell era afirmar que no hay un campo eléctrico y otro magnético, sino que ambos son uno solo. Si hay un campo eléctrico existe otro magnético y recíprocamente.
Esta unidad del campo electromagnético sólo pudo comprobarse años más tarde mediante las experiencias de Hertz y Helmholtz. Desde el punto de vista pedagógico no parece estar errada la explicación del fenómeno procediendo con cada campo por separado.

Por definición, el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada equivale a la carga total contenida en el volumen que abarca dicha superficie.

$$\phi_e = Q_{in} = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho_{in}\, dv = \int_v \nabla \cdot \vec{D}\, dv \qquad \text{(IV-02)}$$

De lo cual se deduce una de las fórmulas de Maxwell: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{in}$
Si derivamos la fórmula del flujo eléctrico:

$$\frac{d\phi_e}{dt} = \frac{d}{dt} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{J}_D \cdot d\vec{S} = I_D \qquad \text{(IV-03)}$$

En la cual Maxwell definió que la densidad de corriente de desplazamiento equivalía a:

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{(IV-04)}$$

Justificada por la fórmula generalizada de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = (\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = \vec{J}_c + \vec{J}_D \qquad \text{(IV-05)}$$

Retornando a la fórmula (IV-02), consideremos el término $I_D = \frac{d\phi_e}{dt}$, que guarda similitud con la fórmula de Faraday $fem = e = -\frac{d\Phi_m}{dt}$. Esto significa que si un flujo magnético variable produce una fuerza electromotriz o campo eléctrico variable de acuerdo a la fórmula:

$$-\frac{d\Phi_m}{dt} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \text{(IV-06)}$$

Así mismo, un flujo eléctrico variable produce un campo magnético variable de acuerdo a la fórmula:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_D = \frac{d\phi_e}{dt} \qquad \text{(IV-07)}$$

El resultado introducido por Maxwell, conforma una reciprocidad entre campos eléctricos y magnéticos, un campo magnético variable produce un campo eléctrico (Ley de Faraday) y un campo eléctrico variable produce un campo magnético (Ley de Maxwell-Ampère). Recordar el párrafo del campo electromagnético.

De esta forma, cuando una corriente eléctrica de conducción entra al capacitor, produce una variación en su carga eléctrica $dQ = I\,dt$, este aumento de carga produce una variación del flujo eléctrico que se transmite al vacío y que mediante la Ley de Gauss se define como:

$$\phi_e = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \qquad \text{(IV-08)}$$

De lo cual, derivando:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d\phi_e}{dt} = I_D \qquad \text{(IV-09)}$$

Por lo tanto, de acuerdo a la Ley de Maxwell-Ampère, aún si el dieléctrico es el vacío, se producirá una corriente debido a que un campo eléctrico variable produce un campo magnético variable $\frac{d\phi_e}{dt} = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}$ cuya circulación origina la corriente de desplazamiento $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_D$ que cierra el circuito junto con la corriente de conducción.

Por lo cual la ecuación de circulación queda:

$$\boxed{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c + I_D = \iint_S (\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}} \qquad \text{(IV-10)}$$

Haciendo nuevamente uso del teorema de Stokes, se tiene:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \qquad \text{(IV-11)}$$

$$\therefore \quad \boxed{(\nabla \times \vec{H}) = (\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = \vec{J}_c + \vec{J}_D} \qquad \text{(IV-12)}$$

Que es la fórmula diferencial de Maxwell-Ampère para la circulación del campo magnético.

Resumen de las ecuaciones diferenciales del Electromagnetismo.

Por una parte están las ecuaciones diferenciales de Maxwell:
(La densidad de carga neta en el interior del volumen v se designa con ρ_{in}).

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{in} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_{in}}{\varepsilon} & (1) \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & (3) \\ \nabla \times \vec{H} = (\vec{J}_c + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = \vec{J}_c + \vec{J}_D & (4) \end{cases}$$

También están las ecuaciones de la Fuerza:

$\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}\hat{r}$ Ecuación de Coulomb derivable de $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_{in}}{\varepsilon}$.

$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$ Ecuación de Lorentz no derivable de ninguna otra fórmula o principio.

También forma parte del conjunto la ecuación de continuidad de la carga, también derivable de otras ecuaciones.

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \quad (\rho_{in} = \rho_v \ densidad\ de\ c\arg a\ cont.\ en\ vol.\ v)$$

Mientras que las relaciones constitutivas son útiles para definir el medio de que se trata, es decir, fijar sus características de: linealidad, isotropía y homogeneidad.

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M}) \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} + \rho_v \vec{u} \quad (\vec{u}\ veloc.\ promedio\ de\ \rho_v) \end{cases} \qquad \text{(IV-13)}$$

Observaciones de Julius Stratton.

a).

La ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$ se obtiene derivando (1) y reemplazando en la divergencia de (4):

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} - \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{J}_c \quad \therefore \quad -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{J}_c$$

Introduciendo la derivada de (1):

$$\boxed{\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_c = 0}$$

b).

Las dos ecuaciones de la divergencia son resultados de las ecuaciones (2) y (4):

Si se toma la divergencia de (2):

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{E} = 0 \quad \therefore \quad -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \ \therefore \ \nabla \cdot \vec{B} = Cte.$$

La conclusión es que la divergencia del campo magnético es constante, pero como el campo pudo ser cero en algún momento (no nació desde un tiempo infinito), la conclusión es que esa constante es nula.

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

Procediendo de igual forma con (4):

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = 0 \quad \therefore \quad \nabla \cdot \vec{J}_c + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \ \therefore \ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D} - \rho_v) = 0$$

Con el razonamiento anterior se llega a que:

$$(\nabla \cdot \vec{D} - \rho_v) = Cte. \ \text{ó} \ \boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v}$$

Flujo de energía y Masa electromagnética.

(Del libro Elettrodinamica de E. Fermi, Ed. Hoepli 2006.).

$a1.-$ Flujo de energía:

Estudiaremos el problema de la propagación de la energía electromagnética en el espacio libre, en forma de radiación u ondas electromagnéticas. El tema fue analizado originalmente por Poynting en 1910 junto con el tema de la presión de radiación
Se revisarán estos dos temas junto con las ecuaciones de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ producidos por cargas en movimiento definiéndose también la masa electromagnética.

Para el análisis se usarán las ecuaciones de Maxwell para el vacío:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Y la fuerza de Lorentz: $\vec{F} = \rho\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)$ $\rho:$ carga por unidad de volumen.

La energía y la potencia que hay por unidad de volumen se calculan a partir del trabajo de las fuerzas:

$$P = \int_v \vec{F} \cdot \vec{V}\, dv = \rho \int_v \left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{V}\, dv \qquad (01)$$

(Una forma equivalente es el cálculo de la potencia en un conductor:

$P = \vec{E} \cdot \vec{J}\ (\frac{W}{m^3 s})$ como densidad volumétrica de potencia por unidad de volumen y de tiempo).

El desarrollo de la ecuación (01) produce algunas simplificaciones:

Dado que: $\vec{V} \times \vec{B} \cdot \vec{V} = 0 \quad \therefore \quad P = \rho \int_v \vec{E} \cdot \vec{V}\, dv$ (02)

Además como: $\rho \vec{V} = \vec{J}_C = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Nos lleva a las expresiones:

$$P = \int_v \left[\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right)\right] dv - \int_v \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dv =$$

$$P = \int_v \left[\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right)\right] dv - \frac{\varepsilon_o}{2} \int_v \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2) dv$$

Por el análisis vectorial, se tiene que:

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

Reemplazando:

$$P = \int_v \left[\vec{H} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right)\right] dv - \int_v \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})\, dv - \frac{\varepsilon_o}{2} \int_v \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2) dv$$

Y también:

$$P = -\frac{\mu_o}{2} \int_v \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H}^2)\, dv - \frac{\varepsilon_o}{2} \int_v \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2) dv - \int_v \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})\, dv$$

$$P = -\left[\frac{\partial}{\partial t} \int_v \frac{\mu_o \vec{H}^2 + \varepsilon_o \vec{E}^2}{2} dv\right] - \int_v \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})\, dv$$

Transformando la última integral con el teorema de Gauss, se tiene:

$$\boxed{P+\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_v \frac{\mu_o \vec{H}^2+\varepsilon_o \vec{E}^2}{2}dv\right]=-\oiint_S (\vec{E}\times\vec{H})\cdot\hat{n}\,dS} \qquad (03)$$

Esta es la fórmula de Poynting que nos dice: El flujo entrante del vector de Poynting $\vec{\Gamma}=\vec{E}\times\vec{H}$, representa la energía total del campo electromagnético; suma de una energía P, que se transforma en calor por efecto Joule y que representa el trabajo de las fuerzas electromagnéticas contenidas en el volumen del campo analizado, más la energía propia del campo, que figura entre corchetes.

Este flujo de energía entrante (por el signo menos) a través de la superficie **S**, equivale a la energía contenida, o que entra, en la unidad de volumen considerado.

$a2.-$ Presión de Radiación:

Si $\vec{F}$ son las fuerzas volumétricas analizadas en el párrafo anterior, que actúan sobre las cargas contenidas en el volumen unitario v, la resultante total de su integración la denominamos $\vec{R}$:

$$\vec{R}=\int_v \vec{F}\,dv=\int_v \rho\vec{E}\,dv+\int_v \rho\vec{V}\times\vec{B}\,dv$$

Como:

$$\rho=\varepsilon_o\nabla\cdot\vec{E} \quad y \quad \rho\vec{V}=\vec{J}=\nabla\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Reemplazando: $\vec{R}=\int_v \varepsilon_o(\nabla\cdot\vec{E})\,\vec{E}\,dv+\mu_o\int_v(\nabla\times\vec{H})\times\vec{H}\,dv-\int_v\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B}\,dv$

Teniendo en cuenta en la última integral que: $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B})=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B}+\vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$\begin{aligned}\vec{R}+\frac{\partial}{\partial t}\int_v(\vec{D}\times\vec{B})\,dv&=\varepsilon_o\int_v\left[\vec{E}(\nabla\cdot\vec{E})-\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})\right]dv\\ &\mu_o\int_v\left[\vec{H}(\nabla\cdot\vec{H})-\vec{H}\times(\nabla\times\vec{H})\right]dv\end{aligned} \qquad (04)$$

Con las dos integrales del segundo miembro, si se aplica el teorema de Gauss, permite hallar el flujo a través de la superficie S que envuelve al volumen v.

Se pueden considerar dos casos:

$a2-1:$

Que tanto las fuerzas eléctricas como las magnéticas se anulen sobre la superficie S. En tal caso el volumen considerado de energía se desplaza libre de fuerzas externas, aislado en el espacio, y el término de la izquierda resulta nulo:

$$\vec{R} + \frac{\partial}{\partial t}\int_v (\vec{D}\times\vec{B})\,dv = 0 \qquad (05)$$

La fuerza volumétrica resultante $\vec{R}$ la podemos igualar a la cantidad de movimiento de las masas contenidas en el volumen v.

$$\vec{R} = \frac{d}{dt}\vec{p} \quad \therefore \quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{p} + \int_v (\vec{D}\times\vec{B})\,dv\right] = 0$$

El contenido del paréntesis es la cantidad de movimiento total del sistema electromagnético del sistema aislado, por lo tanto la conservación del impulso ya no es la cantidad de movimiento mecánico sino la suma de dos impulsos:

$$\boxed{\vec{p} + \int_v (\vec{D}\times\vec{B})\,dv = \vec{p} + \vec{G} = Cte.} \qquad (06)$$

En la cual aparece una nueva cantidad de movimiento llamado <u>impulso electromagnético</u>. El vector $(\vec{D}\times\vec{B})$ representa la densidad del impulso o de la cantidad de movimiento electromagnético.

Este impulso electromagnético $\vec{G}$ no es debido a las masas de las cargas eléctricas contenidas en el volumen v sino que se debe a una especie de inercia de la energía electromagnética para desplazarse con la velocidad $\vec{V}$.
(Ver libro de Panofsky, Pág. 381)

$a2-2:$

En el caso en que las fuerzas sobre la superficie S no sean nulas, dichas fuerzas crearán una presión sobre la superficie del sistema que recibe el nombre de **<u>presión de radiación.</u>**

Casos conocidos son los rayos de luz solar sobre una superficie protectora absorbente. Este fenómeno ha sido comprobado experimentalmente y los resultados de las mediciones coinciden con la teoría que lo sustenta.

$a3.-$ Grupo de cargas eléctricas en movimiento uniforme.

Este tema constituye otro enfoque del anterior trabajo “Ecuaciones de Maxwell para cuerpos en movimiento”.

Una importante consecuencia de las ecuaciones de Maxwell consiste en el hecho notable de prever que un conjunto de cargas eléctricas en movimiento uniforme en el vacío, como en los casos del electrón o del protón, presentan una inercia al movimiento de origen puramente electromagnética.

Para llegar a esta comprobación, en forma independiente a lo visto en el trabajo citado anterior, se deberá calcular el campo electromagnético producido por tal conjunto de cargas eléctricas en movimiento.

Supongamos que el conjunto de cargas se mueven en la dirección del eje x con una velocidad uniforme $\vec{V}$.
Llamemos S al sistema inercial en reposo de coordenadas x, y, z, t y S' al sistema inercial en movimiento con solamente las coordenadas:

$$x' = x - Vt;\ y' = y;\ z' = z \tag{07}$$

Los campos $\vec{E}'$ y $\vec{H}'$ serán funciones solamente de x', y', z' cuyas derivadas parciales se calculan de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'};\quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'};\quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'};\quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} = -V\frac{\partial}{\partial x'}$$

Las ecuaciones de Maxwell, tanto en el sistema S como en el S' deberán ser invariantes, o sea, tener la misma forma.

Como trataremos con sistemas móviles, las expresiones de dichas ecuaciones que mejor se adaptan para el análisis son las escritas en unidades gaussianas.

$$S: \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho;\ \nabla\cdot\vec{H} = 0;\ \nabla\times\vec{H} = \frac{1}{c}\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + 4\pi\rho\vec{V}\right];\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

(08)

$$S': \nabla'\cdot\vec{E}' = 4\pi\rho;\ \nabla'\cdot\vec{H}' = 0;\ \nabla'\times\vec{H}' = \frac{1}{c}\left[\frac{\partial\vec{E}'}{\partial x'} + 4\pi\rho\vec{V}\right];\ \nabla'\times\vec{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}'}{\partial x'}$$

Se indica los operadores ∇' primados para señalar que deben derivarse respecto a x', y', z'.

En el trabajo "Ecuaciones de Maxwell para cuerpos en movimiento" se vio que las ecuaciones anteriores conducían a las siguientes relaciones entre los campos primados y sin primar:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{H} \quad y \quad \vec{H}' = \vec{H} - \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{E} \tag{09}$$

Expresadas en sus componentes escribiremos:

$$\vec{E}\,' = E_x\hat{i} + (E_y - \frac{V}{c}H_z)\hat{j} + (E_z + \frac{V}{c}H_y)\hat{k}$$
$$\vec{H}\,' = H_x\hat{i} + (H_y + \frac{V}{c}E_z)\hat{j} + (H_z - \frac{V}{c}E_y)\hat{k} \qquad (10)$$

O sea:
$$\begin{cases} E_{x'} = E_x & H_{x'} = H_x \\ E_{y'} = E_y - \dfrac{V}{c}H_z & H_{y'} = H_y + \dfrac{V}{c}E_z \\ E_{z'} = E_z + \dfrac{V}{c}H_y & H_{z'} = H_z - \dfrac{V}{c}E_y \end{cases} \qquad (10')$$

Calculemos ahora las ecuaciones de Maxwell ubicándonos en el sistema $S\,'$.

$\nabla'\cdot\vec{E}\,' = \dfrac{\partial E_{x'}}{\partial x'} + \dfrac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + \dfrac{\partial E_{z'}}{\partial z'}$ Teniendo en cuenta la relación (09) y reemplazando:

$$\nabla'\cdot\vec{E}\,' = \frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E_{z'}}{\partial z'} = \nabla'\cdot\vec{E} + \frac{1}{c}\nabla'\cdot(\vec{V}\times\vec{H})$$

Como $\vec{V}$ es una constante, la divergencia: $\nabla\cdot(\vec{H}\times\vec{V}) = \vec{H}\cdot\nabla\times\vec{V} - \vec{V}\cdot\nabla\times\vec{H}$ anula el rotor $\nabla\times\vec{V}$, además el rotor $\nabla'\times\vec{H} = -\dfrac{1}{c}\left[-V\dfrac{\partial E_{x'}}{\partial x'} + 4\pi\rho\vec{V}\right]$

Reemplazando:

$$\nabla'\cdot\vec{E}\,' = \frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E_{z'}}{\partial z'} = 4\pi\rho + \frac{V}{c}\nabla'\times\vec{H} =$$
$$\nabla'\cdot\vec{E}\,' = 4\pi\rho - \frac{V}{c}\left[-\frac{V}{c}\frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} + 4\pi\rho\frac{V}{c}\right] = 4\pi\rho(1-\frac{V^2}{c^2}) + \frac{V^2}{c^2}\frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} \qquad (11)$$

Volviendo a reemplazar en la expresión de la divergencia: $\dfrac{\partial E_{x'}}{\partial x'} + \dfrac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + \dfrac{\partial E_{z'}}{\partial z'}$

$$\boxed{\frac{\partial E_{x'}}{\partial x'}(1-\frac{V^2}{c^2}) + \frac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E_{z'}}{\partial z'} = 4\pi\rho(1-\frac{V^2}{c^2})} \qquad (12)$$

Con el campo magnético es más sencillo: $\nabla'\cdot\vec{H}\,' = 0$ (13)

El cálculo de los rotores de los campos electromagnéticos en el sistema S' da sencillamente:

$$\nabla' \times \vec{E}' = 0 \qquad y \qquad \nabla' \times \vec{H}' = 0$$

De donde puede suponerse que ambos derivan de potenciales escalares:

$$\vec{E}' = -\nabla'\Phi \quad y \quad \vec{H}' = -\nabla'\Psi$$

Reemplazando en (12) y (13):

$$\boxed{(1-\frac{V^2}{c^2})\frac{\partial^2\Phi_{x'}}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\Phi_{y'}}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\Phi_{z'}}{\partial z'^2}=-(1-\frac{V^2}{c^2})4\pi\rho}$$
$$\boxed{(1-\frac{V^2}{c^2})\frac{\partial^2\Psi_{x'}}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\Psi_{y'}}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\Psi_{z'}}{\partial z'^2}=0} \qquad (14)$$

Como estas ecuaciones no representan a una ecuación de Poisson ni a un Laplaciano, es conveniente introducir una nueva variable para homogeneizar las ecuaciones.

Poniendo la nueva variable: $u' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}x'$

Las ecuaciones (14) se convierten en:

$$\boxed{\frac{\partial^2\Phi_{x'}}{\partial u'^2}+\frac{\partial^2\Phi_{y'}}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\Phi_{z'}}{\partial z'^2}=-(1-\frac{V^2}{c^2})4\pi\rho}$$
$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi_{x'}}{\partial u'^2}+\frac{\partial^2\Psi_{y'}}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\Psi_{z'}}{\partial z'^2}=0} \qquad (15)$$

Ahora se tiene una ecuación de Poisson para el campo eléctrico y una ecuación de Laplace (o Laplaciano) para el campo magnético.

En el caso del Laplaciano, en el cual el segundo miembro es nulo, significa que el potencial tiene por solución la ya conocida integral:

$$\Psi(r') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_v \frac{\rho(r')\,dv}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (16)$$

En la cual, como no existen condiciones de frontera que especifiquen que para un cierto $\vec{r}\,'=\vec{r}\,'_o$ existe algún potencial Ψ_o, se concluye que el potencial Ψ es nulo.

$$\Psi = 0 \tag{17}$$

En la ecuación de Poisson para el campo eléctrico, existirá un potencial de valor:

$$\Phi(r_o') = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\int_v \frac{\rho(r')\,du'\,dy'\,dz'}{\left|\vec{r}-\vec{r}_o\,'\right|} \tag{18}$$

En resumen, con las condiciones vistas:

$$\Psi = 0 \quad \therefore \quad \vec{H}\,' = -\nabla'\Psi = 0$$

Las ecuaciones (10') de los campos electromagnéticos en el sistema móvil quedan reducidas a:

$$\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)E_{x'}\hat{i} + E_{y'}\hat{j} + E_{z'}\hat{k} = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$$

$$H_{x'}\hat{i} + H_{y'}\hat{j} + H_{z'}\hat{k} = H_x\hat{i} - \frac{V}{c}E_z\hat{j} + \frac{V}{c}E_y\hat{k}$$

Por lo tanto las ecuaciones del campo electromagnético serán:

$$E_{x'} = E_x \qquad\qquad H_{x'} = H_x$$

$$\begin{cases} E_{y'} = \dfrac{E_y}{1-\dfrac{V^2}{c^2}} & \qquad H_{y'} = -\dfrac{V}{c}E_z \\[3ex] E_{z'} = \dfrac{E_z}{1-\dfrac{V^2}{c^2}} & \qquad H_{z'} = \dfrac{V}{c}E_y \end{cases}$$

Normalmente la velocidad V es muy inferior a la velocidad de la luz, con lo cual el término $1-\dfrac{V^2}{c^2}\cong 1$ es irrelevante, y las ecuaciones anteriores quedan:

$$\begin{cases} E_{x'} = E_x \quad H_{x'} = H_x \\ E_{y'} = E_y \quad H_{y'} = -\dfrac{V}{c}E_z \\ E_{z'} = E_z \quad H_{z'} = \dfrac{V}{c}E_y \end{cases} \qquad (19)$$

$a4.-$ **Masa electromagnética.**

De los resultados obtenidos en el punto $a2-1:$, presión de radiación, una de las conclusiones fue que la masa volumétrica de cargas ρ que se desplazaba libre en el espacio con velocidad uniforme $\vec{V}$, tiene una cantidad de movimiento constante dado por la fórmula:

$$\vec{p} + \int_v (\vec{D}\times\vec{B})\,dv = \vec{p} + \vec{G} = Cte.$$

O en unidades gaussianas:

$$\vec{p} + \frac{1}{4\pi c}\int_v (\vec{E}\times\vec{H})\,dv = \vec{p} + \vec{G} = Cte. \qquad (20)$$

En la fórmula, si $\vec{p}$ era la cantidad de movimiento mecánico debido a las masas de las cargas en movimiento, o sea de los soportes de traslación de las cargas, caso de los electrones o protones, para que se mantenga la conservación del impulso lineal debe agregarse una nueva cantidad denominada cantidad de movimiento electromagnético $\vec{G}.$

Como esta cantidad de movimiento o impulso es proporcional a la velocidad del sistema, el factor que acompaña a la velocidad la llamaremos masa electromagnética.

Si en el valor de $\vec{G} = \dfrac{1}{4\pi c}\int_v (\vec{E}\times\vec{H})\,dv$ reemplazamos los valores de los campos para el caso de medirlos en el sistema S', serán ahora los de la ecuación (19).

Tomando en consideración que el sistema se desplaza en la dirección de x, el producto vectorial, siempre en las mismas unidades, nos da:

$$\vec{E}'\times\vec{H}' = \left[\frac{V}{c}(E_y^2 + E_z^2)\hat{i} + (E_z H_x - \frac{V}{c}E_x E_y)\hat{j} - (\frac{V}{c}E_x E_z + E_y H_x)\right]$$

Tomando sólo la componente según $x,$ se tiene:

$$(\vec{E}'\times\vec{H}')_x = \frac{V}{c}\left(E_y^2 + E_z^2\right) \qquad (21)$$

Como la energía total es: $U = \frac{1}{8\pi}\int_v E^2 dv = \frac{1}{8\pi}\int_v (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) dv$

Podemos poner: $$\int_v \left(E_y^2 + E_z^2\right) dv = \frac{2}{3}\int_v E^2 dv = \frac{2}{3}(8\pi U) \qquad (22)$$

Reemplazando en la cantidad de movimiento electromagnético el valor (21):

$$\vec{G} = \frac{1}{4\pi c}\int_v (\vec{E}'\times\vec{H}')_x dv = \frac{V}{4\pi c^2}\int_v (E_y^2 \times E_z^2)\, dv$$

Teniendo en cuenta la fórmula (22):

$$\vec{G} = \frac{V}{4\pi c^2}\int_v (E_y^2 \times E_z^2)\, dv = \frac{V}{4\pi c^2}\frac{2}{3}(8\pi U) = \frac{4}{3}\frac{U}{c^2}\vec{V} \qquad (23)$$

Por lo tanto la masa electromagnética será el coeficiente de la velocidad:

$$\boxed{m = \frac{4}{3}\frac{U}{c^2}} \qquad (24)$$

La interpretación de la masa electromagnética va recibiendo diferentes interpretaciones y precisiones a medida que el desarrollo de las teorías cuántico-relativistas van avanzando.

Una interpretación muy elemental consiste en concebir una carga en movimiento rectilíneo y uniforme con velocidad $\vec{V}$, pero tal que sea $V \ll c$. Este movimiento genera un campo magnético, pero si ese movimiento se modifica, variará el campo magnético y por lo tanto aparecerá una fuerza electromotriz inducida y un campo eléctrico.

El campo eléctrico actuará sobre la carga eléctrica generando una fuerza que se opondrá al cambio de velocidad. Esta resistencia que aparece cuando se le aplica una fuerza puede interpretarse como debida a una masa inercial que por su origen puede llamarse masa electromagnética.

Lo importante en esto es que en electromagnetismo la conservación de la cantidad de movimiento no se cumple teniendo en cuenta la sola masa de soporte de las cargas eléctricas. Tal el caso de las ondas electromagnéticas que tienen un impulso o cantidad de movimiento suma de diversos términos (incluyendo los de origen relativista).

Un largo tratamiento clásico y relativista está descripto en el libro de Panofsky en las Págs. 381 a 383, y en 390 a 399.

Ver también J. D. Jackson Pág. 730.