Energía electromagnética. Vector de Poynting. Lino Spagnolo

Para los campos estáticos o cuasi estáticos se halló que las densidades de energía almacenadas en los campos eran:

$$\begin{cases} u_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 & (\frac{J}{m^3}) \\ u_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2}\mu_o H^2 & (\frac{J}{m^3}) \end{cases} \quad (01)$$

Para analizar el balance interno de energía en el caso de un campo electromagnético general dado por las ecuaciones de Maxwell, en las cuales se encontrarán corrientes variables y campos variables, la energía electromagnética total almacenada en el sistema de campos eléctricos y magnéticos viene dada por:

$$W = \frac{1}{2}\int_v (\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H})\,dv = \frac{1}{2}\int_v (\varepsilon E^2 + \mu H^2)\,dv \quad (J) \quad (02)$$

Tanto los campos eléctricos como los magnéticos son funciones del tiempo y en consecuencia la energía total también será una función del tiempo.
Esto significa que la energía es instantánea, variable en el tiempo. Su variación, o disminución temporal, viene dada por la derivada, que para sistemas lineales, homogéneos e isótropos, con ε y μ independientes del tiempo, viene dada por:

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2}\int_v (-2\vec{E}\cdot\varepsilon\frac{d\vec{E}}{dt} - 2\vec{H}\cdot\mu\frac{d\vec{H}}{dt})\,dv \quad (W) \quad (03)$$

Utilizando ahora las ecuaciones de Faraday y de Ampère-Maxwell

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \quad \therefore \quad \mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\nabla\times\vec{E} \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{J}_C + \vec{J}_D = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \therefore \quad \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \nabla\times\vec{H} - \sigma\vec{E} \end{cases} \quad (04)$$

Reemplazando en (03):

$$\begin{aligned} -\frac{dW}{dt} &= \int_v (\sigma E^2 dv - \int_v \vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}\,dv + \int_v \vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}\,dv \quad (W) \\ -\frac{dW}{dt} &= \int_v (\vec{E}\cdot\vec{J}_C)dv + \int_v \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\,dv \end{aligned} \quad (05)$$

Potencia disipada por Potencia irradiada.

Efecto Joule.

Y puesto que: $$\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}-\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}=\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) \qquad (06)$$

Aplicando el teorema de Gauss a la potencia irradiada, se obtiene:

$$\boxed{\int_v \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\,dv = \oiint_S (\vec{E}\times\vec{H})\cdot\hat{n}\,dS} \qquad (07)$$

En la cual el producto vectorial: $\boxed{(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{P}}$ $\left(\frac{W}{m^2}\right)$ (08)

Es el denominado **Vector de Poynting** y que representa la densidad de flujo instantáneo de la potencia irradiada a través de la superficie cerrada S.
La fórmula es conocida como **Teorema de Poynting.**

Considerando la fórmula (05), puede ponerse en la forma:

$$\boxed{\int_v (\vec{E}\cdot\vec{J}_C)dv+\frac{dW}{dt} = -\oiint_S (\vec{E}\times\vec{H})\cdot\hat{n}\,dS} \qquad (09)$$

Que una forma de comprobar el cumplimiento del Principio de Conservación de la Energía.
Si la integral del flujo del vector $(\vec{E}\times\vec{H})$ es distinta de cero, su valor será igual a la variación de la energía total, electromagnética más la perdida en calor, con el tiempo.

La primera integral es la energía que se pierde en calor, por efecto Joule, debido a los choques internos de las partículas cargadas y en movimiento provocado por la densidad de corriente $\vec{J}_C$.
Ello se debe a que si una partícula de masa m y carga q se halla en un campo electromagnético estará sometida a una fuerza activa:

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B})$$

Por lo cual su movimiento estará regido por la Ley de Newton:

$$m\frac{d\vec{u}}{dt}=q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}) \qquad (10)$$

Por lo tanto la potencia en juego, o variación de la energía cinética, será:

$$\frac{dT_{cin}}{dt}=m\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{u}=q\vec{u}\cdot(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B})=q\vec{u}\cdot\vec{E} \qquad (11)$$

Si tenemos en cuenta un grupo de partículas que forma una densidad de carga ρ_v, la variación de energía volumétrica será:

$$q\vec{u}\ \textit{se convierte en}\ \rho_v\vec{u}=\vec{J}\ \ \therefore\ \ \boxed{\frac{dT_{cin}}{dt}=\int_v \vec{J}\cdot\vec{E}\,dv} \qquad (12)$$

El vector de Poynting es otra forma de ver que las ondas electromagnéticas transportan energía a través del espacio desde un transmisor hasta un receptor.

El valor de la densidad de flujo de potencia instantáneo $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ es puntual para cada punto del espacio de irradiación. Para hallar el valor de la **potencia neta irradiada** se debe integrar el vector de Poynting a través de una superficie cerrada.

En el caso general se producen pérdidas en el dieléctrico por lo cual existe una atenuación expresada a través de una constante de atenuación α que altera los campos eléctricos y magnéticos de la forma:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= E_o e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)\,\hat{e}_x \\ \vec{H}(z,t) &= \frac{E_o}{\eta} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_\eta)\,\hat{e}_y \end{aligned} \tag{13}$$

Y el vector de Poynting es:

$$\vec{P} = \vec{E}_x \times \vec{H}_y = \frac{E_o^2}{\eta} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z).\cos(\omega t - \beta z + \theta_\eta)$$

El valor medio temporal, o promedio, de la potencia irradiada se calcula con:

$$\vec{P}_{\mathrm{Pr}\,o} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{P}(z,t)\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_S \times \vec{H}_S^*\right) \tag{14}$$

Teniendo en cuenta además que: $\cos A.\cos B = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) + \cos(A+B)\right)$

Reemplazando se obtiene:

$$\boxed{\vec{P}_{\mathrm{Pr}\,o} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_S \times \vec{H}_S^*\right) = \frac{E_o^2}{2\eta} e^{-2\alpha z} \cos\theta_\eta\,\hat{e}_z} \quad \left(\frac{W}{m^2}\right) \tag{15}$$

Mientras que la Potencia promedio temporal Total que atraviesa la superficie S será:

$$P_{PT} = \oiint_S \vec{P}_{\mathrm{Pr}\,o} \cdot \hat{n}\,dS \quad (W)$$

Si el medio no tiene pérdidas, por ejemplo el vacío, el valor medio temporal, o promedio, de la potencia irradiada es:

$$\boxed{\vec{P}_{\mathrm{Pr}\,o} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_S \times \vec{H}_S^*\right) = \frac{E_o^2}{2\eta}\hat{e}_z} \quad \left(\frac{W}{m^2}\right) \tag{16}$$

En el vacío, donde la conductividad $\sigma = 0$, la potencia disipada por efecto Joule es nula y por lo tanto toda la potencia que genera un foco puntual es irradiada, o sea:

$$W_{irr} = \oiint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n}\, dS = P_o 4\pi r^2$$

Dado que $\vec{E} \times \vec{H}$ es constante sobre S por razones de simetría.
Luego la densidad de potencia irradiada para un radio r en el espacio tiene por valor:

$$P_o = \frac{W_{irr}}{4\pi r^2} \left(\frac{W}{m^2}\right)$$

Integración del vector de Poynting – Valor medio.

La integración del vector de Poynting a través de una superficie S cerrada da el valor de la potencia neta irradiada, que sale a través de esa superficie, y equivale al total de la potencia generada menos la potencia perdida por efecto Joule.

Para el caso de un foco de radiación (antena), considerando el caso de ondas planas (dado que las ondas esféricas se pueden considerar ondas planas a grandes distancias del foco), los campos eléctricos y magnéticos generados tienen por valor:

$$\vec{E}(z,t) = E_o e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)\, \hat{e}_x$$

$$\vec{H}(z,t) = H_o e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \vartheta_\eta)\, \hat{e}_y = \frac{E_o}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \vartheta_\eta)\, \hat{e}_y$$

En la cual $|\eta| = \dfrac{E_o}{H_o}\ (\Omega)$ es la impedancia intrínseca del medio, que en el vacío vale

$$|\eta| = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = 120\pi\ (\Omega).$$

El vector de Poynting instantáneo vale:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{E_o^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)\cos(\omega t - \beta z - \vartheta_\eta)\hat{e}_z\ \left(\frac{W}{m^2}\right)$$

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{E_o^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} [\cos\vartheta_\eta + \cos(2\omega t - 2\beta z - \vartheta_\eta)]\hat{e}_z$$

Por las propiedades del coseno: $\cos A . \cos B = \dfrac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

El **valor medio o promedio temporal** en un período de $\vec{P}$, será:

$$\langle \vec{P} \rangle = \vec{P}_{\mathrm{Pr}om}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{P}(z,t)\, dt \quad \left(\frac{W}{m^2}\right)\ con\ T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (22)$$

Lo cual equivale a:

$$\langle \vec{P} \rangle(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}_s \times \vec{H}_s^*) \ \rightarrow \ \boxed{\langle \vec{P} \rangle(z) = \frac{E_o^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos\vartheta_\eta\, \hat{e}_z \left(\frac{W}{m^2}\right)} \quad (23)$$

La $\langle \vec{P} \rangle(z)$ es una función vectorial de la potencia de Poynting que depende de la posición pero, por ser un promedio temporal, es invariable en el tiempo. Es el valor de densidad de potencia promedio que la onda como portadora lleva consigo o densidad de potencia promedio que porta la onda.

Y la **potencia promedio temporal total** que atraviesa una superficie S **será el flujo del promedio del vector de Poynting a través de esa superficie:**

$$\boxed{P_{Pt} = \iint_S \vec{P}_{\Pr om} \cdot d\vec{S} \quad (W)} \tag{24}$$

Es un escalar que mide la potencia de irradiación que atraviesa una superficie S.

Un ejemplo puede aclarar los conceptos.

Dada la onda de campo $\vec{E} = 5\sin(2\pi.10^7 t - 0{,}9.x)\,\hat{e}_z\ (\frac{V}{m})$ en un medio en que $\mu = \mu_o\ \ y\ \ \varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$.

Hallar: $1.-\ \varepsilon_r\ y\ \eta$

$2.-\ \langle \vec{P} \rangle (z)$ $\qquad 3.-\ P_{Pt} = \iint_S \vec{P}_{\Pr om} \cdot d\vec{S} \quad (W)$ que atraviesa una $S = 500\,cm^2$ del plano $2x + y = 5$

Solución. $1.-$ De la ecuación de onda se deduce que $\alpha = 0$.

Además $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad con \begin{cases} \beta = 0{,}9 \\ \omega = 2\pi.10^7 \end{cases}$

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_o \mu_o \varepsilon_r} \quad \therefore \ \sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\beta}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} = \frac{\beta c}{\omega}$$

También:

$$\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\beta c}{\omega} = \frac{0{,}9 \times 3.10^8}{2\pi.10^7} = 4{,}24 \rightarrow \varepsilon_r = 18$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o \varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 88{,}9\,\Omega$$

$2.-\ \langle \vec{P} \rangle (z)$. Cálculo del vector de Poynting:

$$\vec{E} = 5\sin(2\pi.10^7 t - 0{,}9.x)\,\hat{e}_z$$

$$\vec{H} = -\frac{5}{\eta}\sin(2\pi.10^7 t - 0{,}9.x)\,\hat{e}_y$$

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{25}{\eta}\sin^2(2\pi.10^7 t - 0{,}9.x)\hat{e}_x$$

$$\langle \vec{P} \rangle = \vec{P}_{\Pr om}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{P}(z,t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{25}{\eta}\sin^2(2\pi.10^7 t - 0{,}9.x)dt\hat{e}_x$$

$$\langle\vec{P}\rangle = \frac{25}{88,9}\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(2\pi.10^7 t - 0,9.x)dt\hat{e}_x = \frac{25}{88,9}.\frac{1}{2}\hat{e}_x = 140,6\,\hat{e}_x(\frac{mW}{m^2})$$

$3.-$ Cálculo del flujo del promedio del vector de Poynting a través de la superficie

$S.\quad P_{Pt} = \iint_S \vec{P}_{\mathrm{Pr}om}\cdot\hat{n}\,dS \quad (W) \quad S = 500\,cm^2$ del plano $2x + y = 5$

Como la onda portadora tiene una potencia promedio temporal de $140,6\,\hat{e}_x(\frac{mW}{m^2})$, que es realmente el flujo de potencia, la potencia total que atraviesa la superficie S será la obtenida del cálculo P_{Pt}.

La normal a la superficie del plano es: $\hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{5}}$

Reemplazando: $P_{Pt} = \iint_S \vec{P}_{\mathrm{Pr}om}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_S 140,6\,\hat{e}_x\cdot\frac{2\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{5}}.dS$

Al ser todas constantes pondremos:

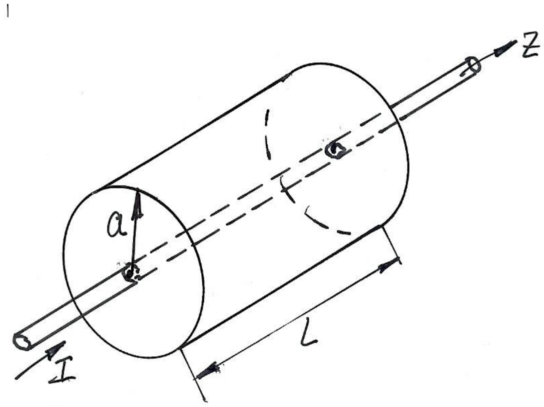
$$P_{Pt} = 140,6\,\hat{e}_x\cdot\frac{2\hat{e}_x + \hat{e}_y}{\sqrt{5}}.0,05 = 6,29\,(mW)$$

Nota adicional.

La relación entre el electromagnetismo de los campos y la electrotécnica de los circuitos con corrientes y tensiones no es tan inmediata. Pero como lo segundo puede ser considerado un caso particular del primero y como además ambos enfoques corresponden a una misma ciencia y a unas leyes comunes, es útil comparar como se utilizan las ecuaciones y los conceptos en un caso y en el otro.

Sea el caso de un resistor cilíndrico de radio a y longitud L, con una conductividad σ, por el cual circula una corriente I cuasi estacionaria.

Analizar el balance de energía con el vector de Poynting para llegar a asimilar el fenómeno a una pérdida por efecto Joule de valor $P_j = I^2R.$



Según lo visto anteriormente, las pérdidas por efecto Joule son:

$$P_o = \int_v \vec{E} \cdot \vec{J}\, dv \tag{25}$$

Con v volumen de todo el espacio. Pero por tratarse de una corriente estacionaria, no se produce el fenómeno de la radiación y toda la potencia contenida en los campos se disipa en calor en el interior del resistor, por lo tanto el volumen a considerar es el solo resistor.

Dado que $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ y $\vec{J} = \frac{I}{S}\hat{e}_z$ con $S = \pi a^2$

$$P_o = \int_v \vec{E} \cdot \vec{J}\, dv = \int_{v'} \frac{J^2}{\sigma} dv'^2 = I^2 \int_{v'} \frac{dv'}{\sigma S^2} \tag{26}$$

Si tomamos el valor eficaz de la corriente y teniendo en cuenta que $dv' = S\,dl$ es el diferencial de volumen del resistor, la potencia disipada tendrá la forma:

$$P_j = I_{ef}^2 \int_{v'} \frac{dv'}{\sigma S^2} = I_{ef}^2 \int_0^L \frac{dl}{\sigma S} = I_{ef}^2 \frac{l}{\sigma S}$$
$$\boxed{P_j = I_{ef}^2 R} \tag{27}$$

Este enfoque corresponde a la teoría de circuitos, ¿pero que pasó con el vector de Poynting y la potencia contenida en los campos?.

$$-\int_v \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dv \tag{28}$$

Investigaremos primero el vector de Poynting: $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$

El campo eléctrico en el interior del resistor se vio que valía:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{S\sigma}\hat{e}_z \tag{29}$$

Para hallar el campo magnético en el interior del resistor es posible asimilarlo a un cable coaxial. En tal caso se calculaba el campo H en el interior del conductor central con una corriente I. El cálculo de H resulta:

$$\vec{H} = \frac{I\rho}{2\pi a^2}\hat{e}_\varphi \tag{30}$$

de dirección $\hat{e}_\varphi$, tangente a la superficie lateral del resistor. El campo H sobre la superficie del resistor valdrá: $\vec{H} = \frac{I}{2\pi a}\hat{e}_\varphi$ (31)

Y el vector de Poynting será (en realidad coincide con el promedio del vector de Poynting ya que los campos no son funciones del tiempo):

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{I^2}{2\pi a S \sigma}\hat{e}_z \times \hat{e}_\varphi = -\frac{I^2}{2\pi a S \sigma}\hat{e}_r \tag{32}$$

La dirección del vector de Poynting (o su promedio) es radial entrante a la superficie lateral, por lo cual el flujo del vector de Poynting a través de la superficie lateral del resistor que llamaremos S', será:

$$\begin{aligned}\Phi_P &= \oiint_{S'} (\vec{E}\times\vec{H})\,\hat{n}\,dS' = -\frac{I^2}{2\pi a S\sigma}\oiint_{S'} dS' \\ \Phi_P &= -\frac{I^2 2\pi a L}{2\pi a S\sigma} = -\frac{I^2 L}{S\sigma} = -I^2 R\end{aligned} \tag{33}$$

El cálculo del flujo medio se hace con los valores eficaces de la corriente:

$$\boxed{P_{Pt} = \langle \Phi_P \rangle = -I_{ef}^2 R} \tag{34}$$

El significado de estas ecuaciones es que la energía almacenada en los campos es el flujo entrante del promedio del vector de Poynting, por la superficie lateral del resistor y que se transforma totalmente en energía disipada por efecto Joule ya que no hay energía de radiación por no ser variables los campos en el tiempo.

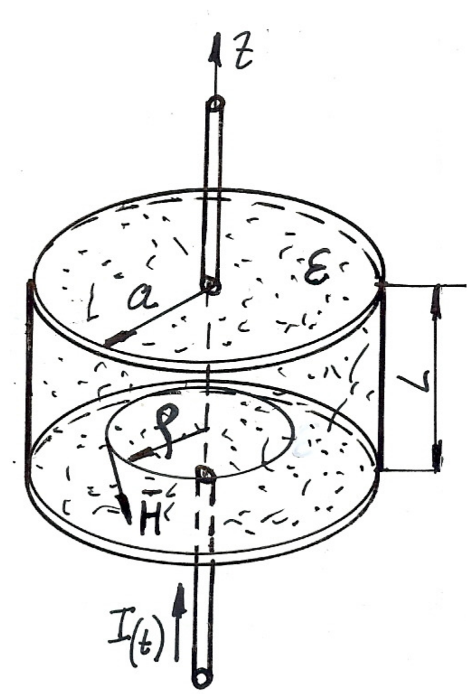
<u>Existe un segundo</u> caso muy importante de analizar pues da lugar a una combinación novedosa de conceptos ya vistos.

Se tiene un capacitor plano de placas circulares de radio a y distancia L entre ellas.

El dieléctrico es de permitividad ε y circula una corriente cuasi estacionaria de baja frecuencia pero que debe ser dependiente del tiempo $I_{(t)}$ para su efectiva circulación entre las placas del capacitor.

<u>Analizar el balance de energía</u> en el capacitor si se conoce la tensión entre las dos placas:

$$V_2 - V_1 = \Delta V_{(t)}$$



El análisis circuital se centra en la potencia que entrega la fuente de tensión:

$$P_o = -I.\Delta V = -I.V\,(W) \tag{35}$$

Donde se tiene que:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \;\rightarrow\; I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt} = C\frac{d}{dt}(V) \qquad (36)$$

El cálculo de la capacidad de un capacitor plano nos da el valor:

$$C = \frac{\varepsilon S}{L} \quad \therefore \quad I = \frac{\varepsilon\pi a^2}{L}\frac{d}{dt}(V) \qquad (37)$$

Por lo cual la potencia entregada valdrá:

$$P_o = -I.V = -\frac{\varepsilon\pi a^2}{2L}\frac{d}{dt}(V^2) \;\therefore\; \boxed{P_o = -\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}CV^2)} \qquad (38)$$

Se podrá despejar la potencia si se conoce alguna de las funciones $V_{(t)}$ o $I_{(t)}$.

Se analizará ahora el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos en el interior del capacitor.

El flujo del campo eléctrico viene dado por la ecuación de Maxwell:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon} \;\therefore\; \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon S}\hat{e}_z = \frac{V}{L}\hat{e}_z \qquad (39)$$

El campo magnético en el interior del capacitor se calcula asimilándolo a un conductor grueso en el cual se hace circular el campo H alrededor de una trayectoria cerrada interior de radio ρ, tal como se ve en la figura. Por la ecuación de Maxwell:

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{(t)} \;\therefore\; \vec{H} = \frac{I_{(t)}}{2\pi\rho}\hat{e}_\varphi \qquad (40)$$

Pero también:

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{(t)} = \iint_S (\vec{J}_C + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S} \qquad (41)$$

En el capacitor sólo existe $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ por lo tanto: $\iint_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = I_{(t)}$ (42)

Como S es constante y utilizando la fórmula (40):

$$I_{(t)} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}S \;\therefore \vec{H} = \frac{I_{(t)}}{2\pi\rho}\hat{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\frac{S}{2\pi\rho}\hat{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\frac{\pi\rho^2}{2\pi\rho}\hat{e}_\varphi = \frac{\rho}{2}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\hat{e}_\varphi$$

De la ecuación del campo eléctrico (39):

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon} \;\;\therefore\;\; \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon S}\hat{e}_z = \frac{V}{L}\hat{e}_z$$
$$\vec{H} = \frac{\varepsilon}{L}\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\pi\rho^2}{2\pi\rho}\hat{e}_\varphi = \frac{\varepsilon\rho}{2L}\frac{\partial V}{\partial t}\hat{e}_\varphi \tag{43}$$

Además, como $I = C\dfrac{dV}{dt}$ y $C = \dfrac{\varepsilon S}{L} = \dfrac{\varepsilon\pi a^2}{L}$

Reemplazando: $\vec{H} = \dfrac{\varepsilon\rho}{2L}\dfrac{\partial V}{\partial t}\hat{e}_\varphi = \dfrac{\varepsilon\rho}{2L}\dfrac{I}{C}\hat{e}_\varphi = \dfrac{\rho}{2}\dfrac{I_{(t)}}{\pi a^2}\hat{e}_\varphi$ (44)

Para un punto interior de radio ρ.

El campo H viene creado por la corriente de desplazamiento $\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ que luego se convierte en $\dfrac{I_{(t)}}{\pi a^2}$. En el caso del capacitor no hay potencia disipada por efecto Joule.

El vector de Poynting será ahora (que será realmente su promedio por ser los campos cuasi estacionarios):

$$\vec{P} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{V}{L}\hat{e}_z \times \frac{\rho}{2}\frac{I_{(t)}}{\pi a^2}\hat{e}_\varphi = -\frac{\rho}{2}\frac{V\,I_{(t)}}{\pi L a^2}\hat{e}_r \tag{45}$$

La dirección del vector de Poynting es radial y entrante por la superficie lateral, por lo cual el flujo del vector de Poynting ingresa a través de la superficie lateral del capacitor, tomando ahora solamente la superficie lateral del capacitor de radio a como referencia, será:

$$\Phi_P = \oiint_{S'}(\vec{E}\times\vec{H})\,\hat{n}\,dS' = -\frac{a}{2}\frac{V\,I_{(t)}}{\pi L a^2}\oiint_{S'}dS'$$
$$\Phi_P = -\frac{a}{2}\frac{V\,I(2\pi aL)}{\pi L a^2} = -V\,I \quad \textit{Ver fórmula } (38). \tag{46}$$

Que es precisamente la potencia suministrada por la fuente que existe en el campo en el interior del capacitor. En este caso no hay potencia disipada y toda la potencia del flujo del promedio del vector de Poynting se concentra como potencia en los campos

$$-\int_v\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)dv \tag{47}$$

existentes en el interior del capacitor.