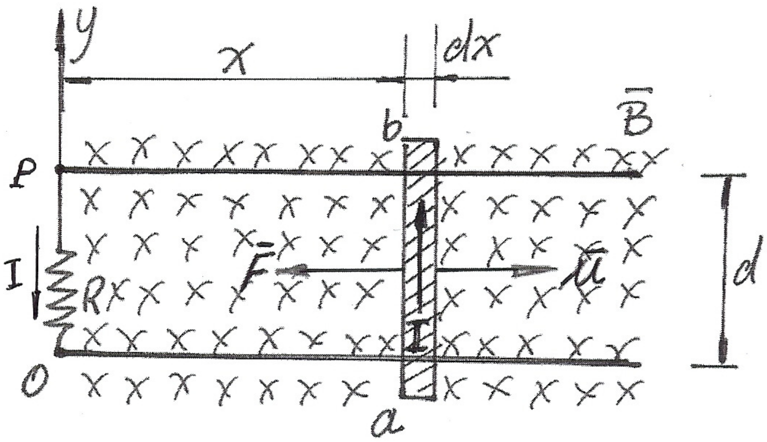
Ley de Faradey

Problema 1.

En base al gráfico de la figura, hallar la tensión inducida entre los terminales $a-b$, con $d=10\,cm$ en los siguientes casos:

1).- La barra $a-b$ está fija en $x=25\,cm$ y la densidad de flujo variable vale:
$\vec{B}=-12\cos(10^6 t)\hat{e}_z\,(mT)$



$R=6\Omega.$

2).- La barra se mueve con una velocidad $\vec{u}=20\,\hat{e}_x\,(m/s)\;\; y\;\; \vec{B}=-12\,\hat{e}_z\,(mT)$

3).- La barra se mueve y el campo es variable. $\vec{u}=20\,\hat{e}_x\,(m/s)$

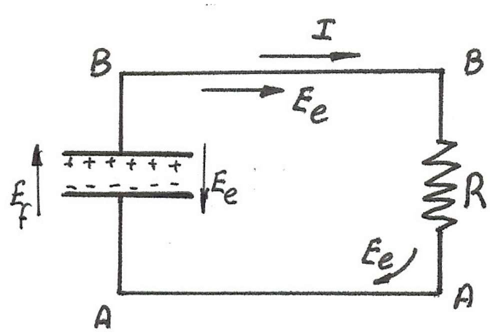
$$\vec{B}=-12\cos(10^6 t-x)\hat{e}_z\,(mT) \qquad \text{(flujo de B entrante)}$$

Solución de 1).-

De la ecuación de la *fuerza electromotriz inducida* (ver S-P.370, Sears 274) se puede poner:

$$V_{Fe}=\oint_L \vec{E}_f\cdot d\vec{l}=-\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

En la cual $\vec{E}_f$ es el campo eléctrico producido por la fuerza electromotriz (que ya no es conservativo) proveniente de la variación del flujo, de ahí el sub índice.



En el interior de un generador existen dos campos eléctricos, una es el $\vec{E}_f$ producido por la fuerza electromotriz, el otro es el campo electrostático $\vec{E}_e=-\nabla V$. El campo eléctrico total $\vec{E}$ en cualquier punto del circuito es: $\vec{E}=\vec{E}_f+\vec{E}_e$.

La característica es que en el interior de un generador o de una batería $\vec{E}_f=-\vec{E}_e$ y que fuera de la misma $\vec{E}_f=0$.

En un circuito cerrado $\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=\oint\vec{E}_f\cdot d\vec{l}+\oint\vec{E}_e\cdot d\vec{l}=\oint\vec{E}_f\cdot d\vec{l}$

Puesto que la integral $\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = 0$ por ser el campo $\vec{E}_e$ conservativo.

Lo cual muestra que el campo inducido $\vec{E}_f$ no es conservativo.

La fuerza electromotriz de la batería o del generador será la integral del campo producido por dicha fuerza:

$$V_{Fe} = \int_a^b \vec{E}_f \cdot d\vec{l} = -\int_a^b \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = I\,R = V_P - V_O$$

Es decir, la fuerza electromotriz inducida coincide con la diferencia de potencial entre los bornes de la resistencia del mismo circuito.

La tensión eléctrica inducida en el conductor $\overline{a-b}$ se obtiene de la ecuación de Faraday: $V_{Fe} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ $\;y\;como\;$ $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 12 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} \sin(10^6 t)\,\hat{e}_z$

Luego: $V_{Fe} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\hat{e}_z) \cdot dS(\hat{e}_z)$ Donde la superficie S es **constante** y de valor: $S = 0{,}25 \times 0{,}10\,(m^2)$ Su orientación es la saliente del plano $x-y$ o sea, en la dirección $\hat{e}_z$. La integral anterior se convierte en: $V_{Fe} = -\frac{\partial B}{\partial t}\iint_S dS$

O sea: $V_{Fe} = -\frac{dB}{dt}.S = -12x0{,}025x10^3 \sin(10^6 t) = \boxed{-300\sin(10^6 t)\;(V)}$

El valor de la tensión inducida, módulo y signo, debe ser tal que la corriente provocada en el conductor $\overline{a-b}$ sea tal que genere un campo $\vec{B}$ que se oponga al aplicado (ley de Lenz). El campo inducido por la corriente I a considerar es el que queda a la izquierda del conductor por ser esta la zona variable que incorpora el conductor $\overline{a-b}$.

Como el campo aplicado es $\vec{B} = -12\cos(10^6 t)\hat{e}_z\,(mT)$ tiene la dirección $(-\hat{e}_z)$ entrante en el plano $x-y$, el campo contrario será provocado por la corriente I que va de $a \rightarrow b$ en el conductor y que va en el sentido $(-\hat{e}_y)$ en el resistor.

Por lo tanto la tensión inducida en los terminales $\overline{a-b}$ será:

$$V_P - V_O = +300\sin(10^6 t)\;(V)$$

Solución de 2).- Aquí no hay variación del campo magnético, sólo existe un conductor en movimiento dentro de un campo magnético $\vec{B} = -12\,\hat{e}_z\,(mT)$ mientras el conductor tiene una velocidad constante $\vec{u} = 20\,\hat{e}_x\;(m/s)$.

Luego $V_{Fe} = \oint_L \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{u} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$ y dado que: $u\,\hat{e}_x \times B(-\hat{e}_z) = uB\,\hat{e}_y$

La dirección de la corriente inducida es la misma que la de $\vec{E}_m$, campo eléctrico debido al movimiento, o sea la misma que la de $\vec{u} \times \vec{B}$.

Los límites de la integral para $d\vec{l}$ deben tomarse de forma opuesta a la de la corriente inducida para satisfacer la Ley de Lenz.

De tal forma se obtiene la *fuerza electromotriz debida al movimiento*: $(\vec{u} \times \vec{B} \cdot \vec{l}\,)$.

$$V_{Fe} = \oint_L \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

$$V_{Fe} = \int_L \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_L u \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$V_{Fe} = V_a - V_b = \int_b^a u\,B\,\hat{e}_y \cdot dl\,\hat{e}_y = u\,B \int_{b,y=d}^{a,y=0} dl = -u\,B\,d$$

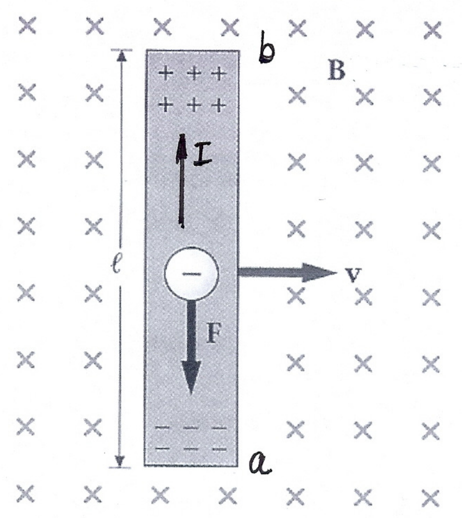
$$V_{Fe} = V_a - V_b = -20 \times 12.10^{-3} \times 0{,}10 = -24\,(mV)$$

Esto equivale a aplicar la fórmula del flujo o de Faraday para el módulo de la tensión inducida: $V_{Fe} = \dfrac{d\Phi_m}{dt} = \dfrac{d}{dt}(B.S) = \dfrac{d}{dt}(B.l.x) = B.l.u$

En la cual l es la longitud del conductor de corriente.

El sentido de la tensión inducida tiende a producir una corriente tal que provoque una fuerza $I\,\vec{l} \times \vec{B}$ que se oponga al movimiento en $+\hat{e}_x$, luego la corriente I debe ir de $a \to b$, verificándose $V_b > V_a$.

En la figura adjunta se ve como los electrones (por su carga negativa) son obligados a moverse hacia abajo $\vec{F} = (-e)\vec{u} \times \vec{B}$ y como el potencial en b es mayor que en a, caso que corresponde a un generador V_{Fe}. Luego en el resistor R la corriente fluye del potencial mayor al menor.



$F = qvB$

Las cargas acumuladas en los extremos crean el campo electrostático que a su vez da origen a la corriente en el circuito, con ello la carga en los extremos se reduce con lo cual las fuerzas magnéticas $(q\,\vec{u} \times \vec{B})$ producen nuevos desplazamientos de electrones que reponen las cargas. Este es el papel de la fem.

(Nota: La fuerza sobre un conductor móvil es $\vec{F} = I\,\vec{l} \times \vec{B} = q\,\vec{u} \times \vec{B}$

El trabajo realizado por el conductor a una velocidad $\vec{u}$ es: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$

Con $dl = u\,dt \;\therefore\; dW = F\,dl = IlB.u\,dt$, en la cual

$$I\,dt = dq \;\therefore\; dW = uBl\,dq\ ,$$

siendo el trabajo por unidad de carga precisamente *la fuerza electromotriz.*

$$\boxed{fem = \varepsilon = \frac{dW}{dq} = uBl = \vec{u}\times\vec{B}\cdot\vec{l}\ \ (Volt = \frac{J}{C})}$$

La definición formal de la $fem = \varepsilon$ es $\varepsilon = \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$ en la cual $\vec{E} = \frac{1}{q}\vec{F}$ con $\vec{F}$ la fuerza neta por unidad de carga que equivale a la suma de una fuerza eléctrica y otra magnética: $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\,\vec{u}\times\vec{B}$ *ó* $\boxed{\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}}$

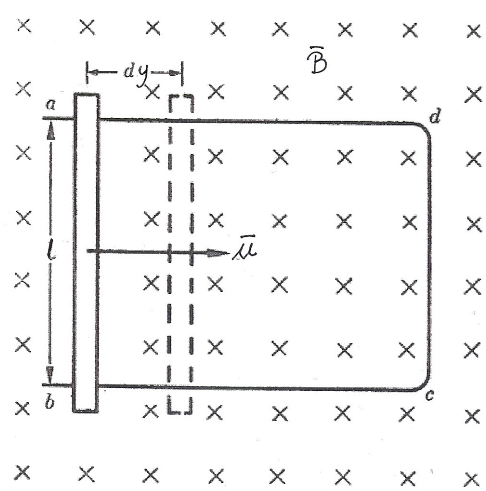
Suma de un campo electrostático $\vec{E}$ y de un campo eléctrico no conservativo debido a *la fuerza electromotriz* $\vec{u}\times\vec{B}$.

En consecuencia:

$$fem = \varepsilon = \oint(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \oint\vec{E}\cdot d\vec{l} + \oint(\vec{u}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

Como la integral electrostática es nula, nos queda: $\boxed{fem = \oint(\vec{u}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}}$

Ley de Faraday: El problema de *la fuerza electromotriz inducida* en las condiciones de un movimiento cinético del medio, acepta una segunda interpretación.



Si el conductor $a-b$ se desplaza a la derecha, se produce una reducción en la superficie barrida $dS = l\,dy$ y la variación de flujo será:

$$d\Phi = -B\,dS = -B\,l\,dy$$

Es decir: $-\frac{d\Phi}{dt} = B\,l\frac{dy}{dt} = u\,B\,l$

Donde $\vec{u}\times\vec{B}$ señala la dirección de la corriente I. O sea, $\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \vec{u}\times\vec{B}\cdot\vec{l}}$

Y este fenómeno se da en general aún cuando el circuito permanezca fijo y sea el flujo que varíe con el tiempo por razones inherentes a la misma generación del flujo.
En tal caso se producirá una *fuerza electromotriz inducida* de valor:

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Fin Nota)

Solución de 3).- Este es un caso combinado de los dos anteriores pero con diferentes valores: Campo magnético $\vec{B} = -12\cos(10^6 t - x)\hat{e}_z\ (mT)$

Velocidad constante $\vec{u} = 20\,\hat{e}_x\ (m/s)$.

En este caso, a diferencia del primero, la superficie es variable, y la fórmula para la tensión inducida es: $V_{Fe} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \int_L \vec{u} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_C}{dt}$

Evaluaremos las dos integrales por separado: **La primera integral** es:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{d\vec{B}}{dt} = 12x10^6\,x10^{-3}\sin(10^6 t - x)$$

La superficie que debe considerarse ahora es $d\vec{S} = dx.dy\,\hat{e}_z$

$$-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\int_0^{0,10} dy \int_0^x 12x10^3 \sin(10^6 t - x)dx$$

$$= -0{,}10x12x10^3 \left[\cos(10^6 t - x)\right]_0^x = -1200\left[\cos(10^6 t - x) - \cos(10^6 t)\right](V)$$

La segunda integral es: Procediendo como en el caso 2:

$V_{Fe} = \oint_L \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{u} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$ y dado que $u\,\hat{e}_x \times B(-\hat{e}_z) = uB\,\hat{e}_y$

$$V_{Fe} = \int_L \vec{u} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{0,10}^{0} 20x12\cos(10^6 t - x)\,dy$$

$$V_e = -0{,}10x20x12\cos(10^6 t - x) = -24\cos(10^6 t - x)\,(mV)$$

(Observar el resultado que es en mV en tanto la anterior es en V).

La suma de las dos integrales nos dan la tensión inducida total:

$$V_{Fe} = -1200[\cos(10^6 t - x) - \cos(10^6 t)] - 24.10^{-3}\cos(10^6 t - x)\ (V)$$

Y en la cual el último valor es despreciable frente al primero.

$$V_{Fe} = -1200[\cos(10^6 t - x) - \cos(10^6 t)]\ (V)$$

Por otra parte, como $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Será: $\therefore\ \boxed{V_e = 2400\sin(10^6 t - \frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})}\,(V)$

Existe otra forma de resolver el problema: consiste en utilizar la fórmula del flujo concatenado total:

$$\boxed{V_{Fe} = -\frac{d\Phi_C}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}$$

El cálculo del flujo concatenado: En la integral se introducen las dos variaciones: la de $\vec{B}$ y la de la variación de la superficie $d\vec{S}$, combinándolas para integrar.

$$\Phi_C = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_0^{0,10} dy \int_0^x -12\cos(10^6 t - x)\,dx$$

$$\Phi_C = -0,10x12\sin(10^6 t - x)\Big|_0^x = -1,2\sin(10^6 t - x) + 1,2\sin(10^6 t)$$

Además, como la velocidad constante es: $u = \frac{dx}{dt}\ \therefore\ x = u.t = 20t$

Reemplazando en la anterior: $\Phi_C = -1,2\sin(10^6 t - 20t) + 1,2\sin(10^6 t)$

Considerando que el flujo es creciente entre para un x creciente y que el flujo generado por la corriente inducida debe oponerse al crecimiento de Φ, deberá tomarse como

flujo inducido al valor: $\Phi_C = 1,2\sin(10^6 t - 20t) - 1,2\sin(10^6 t)$

La tensión inducida será:

$$V_{Fe} = -\frac{d}{dt}\Phi_C = -1,2(10^6 t - 20t)\cos(10^6 t - 20t) +$$

$$+1,2.10^6\cos(10^6 t)\ (mV)$$

$$\boxed{V_{Fe} = -1,2.10^3.t.\cos(10^6 t - 20t) + 1,2.10^3\cos(10^6 t)\ (V)}$$

Obteniéndose el mismo resultado anterior, donde nuevamente se desprecia el término $1,2x20\cos(10^6 t - 20t)\ (mV)$ por su mínima relevancia.

Problema 2.

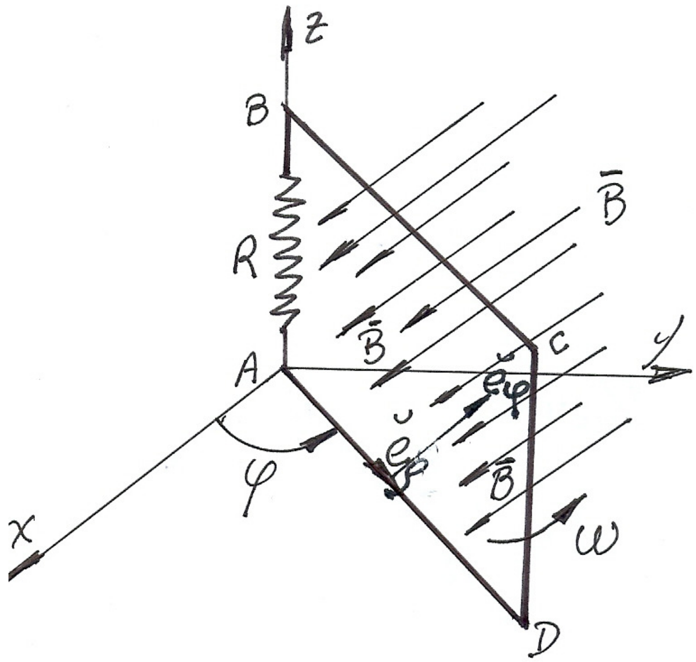
La espira de la figura está rotando con una frecuencia de $50\,Hz$ mientras es atravesada por un campo magnético $\vec{B} = 0{,}02\ \hat{e}_x\,(T)$ uniforme en el espacio.

Hallar la corriente inducida en la resistencia $R = 0{,}1\Omega$ si las dimensiones de la espira son:

$\overline{BC} = d = 4\,cm;$

$\overline{DC} = h = 3\,cm$

en $t = 0{,}003\,s$ e inicialmente el cuadro está en el plano $x - z$.



Solución

Poniendo $\vec{B} = B_o\,\hat{e}_x$ su proyección sobre los ejes cilíndricos $\hat{e}_\rho$ y $\hat{e}_\varphi$ son:

$\vec{B} = B_o \cos(\omega t)\,\hat{e}_\rho - B_o \sin(\omega t)\,\hat{e}_\varphi$ con $\vec{u} = \omega b\,\hat{e}_\varphi$ la velocidad del conductor $\overline{DC}$.

Utilizando la ecuación de Faraday para *la fuerza electromotriz cinética*:

$$\varepsilon = V_{Fe} = \oint_L \vec{u}\times\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

El producto:

$$\vec{u}\times\vec{B} = \omega d\,\hat{e}_\varphi \times \left[B_o \cos(\omega t)\,\hat{e}_\rho - B_o \sin(\omega t)\,\hat{e}_\varphi\right] = -\omega d\,B_o \cos(\omega t)\,\hat{e}_z$$

Como este valor coincide con la dirección de la corriente inducida, que circulará de C a D. Verificar que esto coincide con la dirección del flujo que produce la corriente que justamente se opone al flujo del $\vec{B}$ aplicado.

Integrando ahora la fuerza inducida tomando los límites de $d\vec{l} = dl\,\hat{e}_z$ en forma opuesta a la dirección de la corriente inducida (por la Ley de Lenz):

$$\varepsilon = V_{Fe} = \oint_L \vec{u}\times\vec{B}\cdot d\vec{l} = -\omega d\,B_o \cos(\omega t)\,\hat{e}_z \cdot \int_{z=0}^{z=0{,}03} dl\,\hat{e}_z =$$

$$\varepsilon = V_{Fe} = -B_o \omega d\,h\,\cos(\omega t)$$

$$\varepsilon = -2\pi x 50 x 0{,}04 x 0{,}02 x 0{,}03 x \cos(2\pi x 50 x 0{,}003) = -4{,}43\,(mV)$$

Luego la corriente valdrá: $I = \dfrac{-4{,}43}{0{,}1} = -44{,}3\,(mA).$

<u>Al mismo resultado se llega aplicando la ecuación del flujo:</u>

$$V_{Fe} = \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Con: $\Phi = \iint \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS \quad y \quad \vec{B} = B_o \cos(\omega t)\,\hat{e}_\rho - B_o \sin(\omega t)\,\hat{e}_\varphi$

Y el elemento de superficie: $\hat{n}\, dS = d\rho\, dz\, \hat{e}_\varphi$

La integral: $\Phi = -\int_{\rho=0}^{\rho=d} d\rho \int_{z=0}^{z=h} B_o \sin(\omega t)\, dz = -B_o \sin(\omega t)\, d\, h$

Considerando que el flujo es creciente entre $\varphi = 0 \;\; y \;\; \varphi = \frac{\pi}{2}$ y que el flujo generado por la corriente inducida debe oponerse al crecimiento de Φ, deberá tomarse como flujo inducido al valor: $\Phi = +B_o \sin(\omega t)\, d\, h$

Y la *fuerza electromotriz* será: $\boxed{V_{Fe} = \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_o \omega d\, h \cos(\omega t)}$

Mismo valor al obtenido anteriormente.