

# BOLETÍN MATEMÁTICO

Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada  
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

16

OCTUBRE 2008

REGISTRO DE LA PROPIEDAD INTELECTUAL ISSN 0329-0255



UNIVERSIDAD DE MORÓN

Autoridades de la  
Facultad de Ciencias  
Económicas y  
Empresariales

Decano  
Dr. Jorge Raúl Lemos  
Vicedecano  
Dr. Jorge Emilio Salvel  
Secretario Académico  
Dr. Osvaldo Luis Perillo  
Secretaria Adjunta  
Dra. Amanda Raquel Llistosella  
Director de Estudios y Coordinación  
Dr. Vicente Filleti  
Directora de Investigaciones y Enseñanza Experimental  
Prof. Elvira Ventura

Consejeros del Honorable Consejo Académico  
de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales  
Dr. Miguel Gregorio Skubic  
Dra. Norma Beatriz Irigoyen  
Dr. Raúl Roque Orellano  
Dr. Fernando Appesseche  
Dr. Sergio Andrés Ghedin  
Dr. Domingo José Mazza

Representante de Profesores ante el H. C. S.  
Dra. Alicia I. de Montagut de Rodriguez

Directores de Carrera:  
Dr. Raúl Roque Orellano (Contador Público)  
Dr. Miguel Gregorio Skubic (Licenciatura en Administración)  
Lic. Domingo José Mazza (Licenciatura en Economía)  
Lic. Carlos Alberto Ferreras (Licenciatura en Comercialización /  
Técnico Superior en Comercialización)  
Lic. Guillermo José Garberi (Licenciatura en Recursos Humanos /  
Analista Universitario en Recursos Humanos)  
Lic. Luis Antonio Leo (Licenciatura en Relaciones Públicas /  
Analista Universitario en Relaciones Públicas)  
Dra. Amanda Raquel Llistosella (Licenciatura en Seguros / Técnico Superior en Seguros)  
Lic. Marcelo Emilio Mirón (Tecnatura en Comercialización Minorista)  
Lic. Germán Avelino Kraus (Licenciatura en Comercio Internacional)

Directores de Institutos de Investigación:  
• Instituto de Investigaciones Contables  
Dr. Isaac Aizik Senderovich  
• Instituto de Investigaciones Económicas  
Dr. Vicente H. Monteverde  
• Instituto de Investigaciones Administrativas  
A Designar  
• Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada  
Ing. Luino Edelfio Vilches  
• Instituto de Investigaciones Tributarias  
Dr. Juan Ferrari Herrero  
Subdirector: Dr. Alfredo Destuniano  
• Instituto de Metodología Jurídica Aplicada en las Ciencias Económicas  
Dr. Eduardo Mario Favier Dubois  
• Instituto de Investigaciones de la Pequeña y Mediana Empresa  
Dr. Horacio Armando Irigoyen  
• Instituto de Investigaciones de Humanidades y Ciencias Sociales Aplicadas  
a las Ciencias Económicas y Empresariales  
Prof. Elvira Ventura

Directores de Departamentos Pedagógicos  
• Área Pedagógica de Administración  
Dr. Jorge Eduardo Marcos  
• Área Pedagógica de Contabilidad  
Dr. Sergio Daniel Arguissain  
• Área Pedagógica de Economía  
Dr. Vicente Filleti  
• Área Pedagógica de Humanidades  
Prof. Elvira Ventura  
• Área Pedagógica Jurídica  
Dr. Eduardo Mario Favier Dubois  
Subdirectora: Dra. Amanda Raquel Llistosella  
• Área Pedagógica de Matemática  
Ing. Martín Adler  
• Área Pedagógica de Comercialización  
Dr. Fernando Appesseche

**Instituto de Investigaciones de Matemática  
Aplicada de la Facultad de Ciencias  
Económicas y Empresariales de la UM**



# BOLETÍN MATEMÁTICO

Año 10 - Nº 16 - Octubre 2008

Registro de la Propiedad Intelectual: ISSN. 0329-0255

## ÍNDICE

	Pág.
<b>La cuestión ética en la docencia universitaria</b> Autor: Dr. Héctor Daniel Dei	5
<b>Decisiones en condiciones de riesgo o de incertidumbre</b> Autor: Ing. Luino E. Vilches	11
<b>Métodos para estimar el componente cíclico en series temporales con aplicaciones al Producto Bruto Interno por habitante en Argentina (Primera parte)</b> Autor: Dr. José Luis Iparraguirre D`Elía	27
<b>Estrategias para el diseño de mapas cognitivos difusos</b> Autores: Profesores Lisandro Curia, Andrea Lavalle y Federico Alegre	39

Las opiniones vertidas en los trabajos que se publican en este Boletín son de exclusiva responsabilidad de sus autores.

## STAFF

### Director

Ing. Luinor E. Vilches

[lvilches@unimoron.edu.ar](mailto:lvilches@unimoron.edu.ar)

### Redacción

Profesores de la Facultad de Ciencias  
Económicas y Empresariales

### Producido por la Oficina de Medios UM

#### Editor:

Lic. Alejandro Gavric

#### Diseño Gráfico:

DCV. Sandra Luján

#### Coordinación:

Marcela Golía

#### Corrección:

Prof. Susana Lamaison

### Impreso en los Talleres Gráficos UM

#### Año 10 Número 16

Registro de la Propiedad  
Intelectual ISSN 0329-0255

#### Universidad de Morón

Cabildo 134 (B1708JPD) Morón  
(011) 5627-2000 (líneas rotativas)  
Fax: 5627-2002

E-mail: [webmaster@unimoron.edu.ar](mailto:webmaster@unimoron.edu.ar)

Internet: [www.unimoron.edu.ar](http://www.unimoron.edu.ar)

LOS CONTENIDOS DE LOS NÚMEROS 1 A 15 DE ESTE  
BOLETÍN ESTÁN INSTALADOS EN LA PÁGINA WEB DE LA  
UNIVERSIDAD DE MORÓN:

[www.unimoron.edu.ar](http://www.unimoron.edu.ar) → Facultades → Facultad de  
Ciencias Económicas y Empresariales → Publicaciones

Universidad de Morón  
Cabildo 134 (B1708JPD) Morón  
54-011-5627-2000 (líneas rotativas) - Fax: 5627-2002  
[e-mail: webmaster@unimoron.edu.ar](mailto:webmaster@unimoron.edu.ar) - Internet: [www.unimoron.edu.ar](http://www.unimoron.edu.ar)

Se autoriza la reproducción parcial o total de los artículos publicados en este Boletín con la condición de que se mencionen su fuente y sus autores.

# LA CUESTIÓN ÉTICA EN LA DOCENCIA UNIVERSITARIA

(\*) Profesor Titular de Filosofía del Derecho y de Metodología de la Investigación y Director del Instituto de Investigaciones en la Facultad de Filosofía, Ciencias de la Educación y Humanidades de la Universidad de Morón.

Por el Dr. Héctor Daniel Dei (\*)

Texto de la conferencia dictada en la Universidad de Morón el día 21/05/07

Uno de los pensamientos que viene torturando mi espíritu desde el día en el que el Dr. Cozza me convocó para conversar con ustedes sobre la cuestión ética es el alcance del valor de las palabras. Me sigo interrogando todavía acerca de si verdaderamente encuentros de este tipo pueden servir para generar un espacio de reflexión interior en cada uno de nosotros, no sólo debates circunstanciales que refuercen nuestro narcisismo. Una reflexión íntima, digo, capaz de dar lugar a cambios sustantivos en nuestra conducta como docentes y como ciudadanos, sea para fortalecer los principios que guían nuestras acciones o, en su defecto, modificarlos. Particularmente me he preguntado si vale la pena entrar en disquisiciones terminológicas o apelaciones a autores o a enfoques histórico-filosóficos cuando, en realidad, vivimos en un mundo acuciado por la falta de sentido. Por otra parte, el esfuerzo de todos los grandes pensadores de la historia que se han ocupado del tema ha sido el mismo: procurar, en definitiva, comportarnos mejor moralmente o, con más precisión, intentar que aprendamos a vivir a la altura de la dignidad que suponemos está dicha en la expresión "seres humanos". A pesar de estas y otras dudas estoy aquí, convencido de que las oportunidades de apostar a lo humano en nosotros son una gracia y un compromiso que no puedo eludir, precisamente porque para mí un docente debe enseñar ante todo con su testimonio. Y esto envuelve la vida toda del docente, no sólo el tiempo dispuesto por una institución en su cronograma de actividades académicas.

Sin embargo, me aprovecharé del título de este encuentro para hacer una distinción que estimo clave en mi

pensamiento, la cual me permitirá precisar un poco mejor las ideas que deseo compartir con ustedes y articularlas adecuadamente.

Hablamos aquí de “cuestión”, la cuestión ética.

Al menos en mi exposición, no estaré hablando de *problemas* de carácter ético —subrayo aquí el término 'problema'—; problemas que podamos tener en nuestra tarea como docentes. Porque no es lo mismo tener el desafío de una “cuestión” que enfrentarse a un “problema”, particularmente cuando se tratan temas que nos involucran de un modo personal y decisivo. Éste fue, por otra parte, en buena medida, mi propio caso comentado.

Problemas son los sueldos, la equidad en el trato, la valorización de nuestras tareas, el respaldo administrativo para llevar a cabo el acto educativo, etcétera. ¿Por qué digo que son *problemas*? Simplemente, porque son *obstáculos* contingentes que técnicamente pueden superarse. Otra cosa muy distinta es la *disposición* a resolverlos. La disposición a resolverlos tiene directa relación con las decisiones de políticas de gestión de quienes tienen que proveer los medios técnicos o los espacios de entendimiento para que esos problemas no constituyan un obstáculo en la tarea docente. De modo que queda claro que un problema es un obstáculo, una dificultad en la ejecución o cumplimiento de una actividad. El problema exige una solución, la superación de la dificultad.

Ahora bien, la superación de un obstáculo depende de tres condiciones: 1) técnicas, 2) tiempo, y 3) conocimientos o información. Sin embargo, ninguna de estas condiciones puede darse si no existe la disposición y la decisión de resolverlas. Y esto es precisamente el carácter de una “cuestión”. El desafío de una cuestión, a diferencia de un problema, supone la voluntad de cambio que viene de la mano del ejercicio de la libertad de configurar el sentido de la realidad que queremos vivir y ser. La cuestión, pues, no exige soluciones. Interpela por mucho más, por una resolución, es decir que una cuestión nos involucra enteramente en el acto personal de constitución de la realidad que queremos construir.

Reflexionemos un poco más sobre estas afirmaciones.

Advirtamos que detrás del modo como procuramos enfrentar los problemas está la elección del universo de sentido que guía nuestra conducta, los valores que orientan todas nuestras acciones. Dicho de otra manera, el abordaje y los medios con que enfrentamos los problemas están vinculados con la idea que tenemos de las personas, de nosotros mismos y del valor de nuestras acciones. Por eso las cuestiones son asunto de consideración ética. Los problemas no; ellos son las consecuencias prácticas de las resoluciones axiológicas que adoptamos en el ejercicio de nuestra libertad para vivir y actuar cuando respondemos a los interrogantes de sentido que son las cuestiones.

Podemos ir más lejos todavía e inferir qué cuestión y problema se implican de tal manera que muchos de nuestros problemas ocurren porque no hemos definido claramente la cuestión que nos lleva a comportarnos de una forma determinada. En otras palabras, muchos problemas de interacción en el ámbito de la actividad académica, por ejemplo, son consecuencia de que los valores dichos no son los realizados, esto es, se trata frecuentemente de una *ética declamada* y no de una *moral vivida*.

Esto es así porque la verdadera respuesta que hemos dado a las cuestiones de sentido se sostiene en una consideración de las personas y las cosas como útiles, como objetos de manipulación en función de nuestros intereses.

En esta misma dirección digo que cuando uno decide ser docente, decide también un modo de ser vital, asume la vida en la perspectiva de *un otro ante sí*, porque siempre hay un otro en nuestras realizaciones en el ejercicio de la docencia. La existencia de ese otro es aún más determinante cuando su mirada no se cruza con la nuestra, cuando su presencia física no interpela nuestra conciencia, porque pone a prueba en la rutina del acto administrativo la autenticidad de nuestra vocación docente; me refiero obviamente a la circunstancia en que nos toca desempeñarnos en un cargo de gestión o a la situación de completar fuera del aula el acto educativo. Ese otro es de modo eminente el alumno, cualquiera sea su condición y situación. Pero también es el colega a quien tenemos que respaldar psicológica y logísticamente, la comunidad educativa que confía en nuestras competencias y, sin duda, la comunidad toda a la

que pertenecemos, ya que se supone que la acción educativa es el medio formal idóneo por el cual constituimos socialmente un lugar y una identidad, desde el que podemos ser con los otros pueblos del Planeta.

La sola presencia de un otro que, sabemos con certeza, espera algo de nosotros, modifica pues el sentido de la elección del mundo que queremos vivir desde la tarea docente. Entonces, como podemos apreciar, el tema de la cuestión adquiere inmediatamente toda la sustancia y la dimensión de un interrogante sobre nuestra propia vida, la persona y el profesional que hemos elegido ser. Por eso la cuestión ética en la docencia, como las cuestiones de ética en los negocios, en la práctica médica, en la actividad política, en la gestión académica, etc., no son de ningún modo independientes de los valores morales que sostenemos como personas. No se trata meramente de aplicar normas e imponer principios deontológicos, siempre abstractos, sin la consistencia de haber sido elegidos como propios en la encarnadura vital de una existencia concreta. Somos o no somos.

No se me ocurre aquí nada más preciso para ilustrar lo que deseo expresarles que aquella afirmación evangélica: "Por sus frutos los conoceréis". Luego, no hay términos medios. Lo que no está en el corazón, tampoco puede estar en sus manifestaciones. Lo que no ha sido asumido en nuestra visión de la realidad no lo encontraremos en las decisiones y los comportamientos cotidianos. Sí, podremos confundir a nuestros interlocutores circunstanciales con hábiles legitimaciones o estrategias por algún tiempo. A la postre, siempre el árbol muestra sus frutos.

En realidad, las únicas limitaciones con las que nos enfrentamos para que la realidad de nuestra tarea muestre su verdadero rostro son las sombras de las debilidades que tenemos como seres humanos. Pero, conforme sea la respuesta que hemos dado sobre la persona que queremos ser y el mundo que queremos vivir, esas limitaciones y debilidades, esas sombras de defectos inevitables reflejarán: o bien, la grandeza de los valores a los que aspiramos, o bien, la mediocridad de nuestro ideal de lo humano. El error o los quiebres en nuestra conducta, están previstos en el marco de las condiciones estructurales de nuestra finitud, pero la intención, las aspiraciones de



superación y la capacidad de reparación dependen de la materia del espíritu con que estamos hechos y decidimos ser.

La cuestión ética pasa pues por los valores con que construimos todos los días y a toda hora las posibilidades de nuestra vida. Esos valores son, también, los que se reflejan en nuestra conducta en el aula o en las decisiones sobre el fundamento pedagógico que orientan la formulación de los objetivos educativos a nivel institucional o en el plano singular del trabajo de cátedra. La respuesta a la pregunta ¿qué persona queremos ser y en qué sociedad queremos vivir? no es diferente de la respuesta al interrogante sobre ¿qué profesionales queremos formar? Las instituciones pueden escribir hermosos perfiles de egresados y abundar en detalles de competencias, sea para brindar atractivas ofertas educativas o satisfacer administrativamente las necesidades burocráticas de los organismos de evaluación, pero esto no forma seres humanos y ciudadanos mejores, ni profesionales moralmente responsables, tan solo *producimos* —curioso verbo que empleamos sin pensar—, tan solo producimos, repito, la subespecie “artefactos humanos” con mayor o menor habilidad estratégica para satisfacer exigencias renovadas de consumo. De hecho, la mercadotecnia educativa está por múltiples lados exigida y alentada. La coherencia entre lo que queremos ser y lo que efectivamente hacemos refleja la autenticidad de nuestro compromiso como docentes y expresa nuestra responsabilidad como protagonistas privilegiados en la construcción del futuro de nuestro país y de la humanidad.

Que la educación hoy esté en crisis, que tenga el valor de un bien de cambio, una mercancía, no justifica de nuestra parte que abandonemos el sentido de nuestra elección vocacional. Si lo económico parece en nuestros días determinante para definir la importancia de un pueblo y el valor de las personas, es porque la educación y la cultura han abandonado su lugar en la historia.

Por eso, hablar o no de ética da lo mismo si no estamos dispuestos a vivirla, a enseñar que detrás de todo derecho hay un deber, que toda norma tiene sentido en su cumplimiento y, ante todo, para quien legisla.



En fin, si no damos fe de la existencia de la educación y la cultura en la creación y en la tarea de formar testimonialmente en valores de vida, nuestra tarea no tiene sentido. Como las cuestiones, no son un asunto teórico, sino práctico. No olvidemos que nuestros maestros en el pensamiento llamaron a las cuestiones que trataban estos problemas “filosofía práctica”, y el interés práctico no es otro que el saber a qué atenerse en la vida para ser con los otros. Este asunto, como advertirán, no admite doble discurso.

# DECISIONES EN CONDICIONES DE RIESGO O DE INCERTIDUMBRE

(\*) Profesor Titular Extraordinario de Investigación Operativa y Director del Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada, en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Morón.

por el Ing. Luinor E. Vilches (\*)

*Tomar una decisión* implica desarrollar un proceso que conduzca a seleccionar, de un conjunto de posibles cursos de acción, aquel que permita la mayor aproximación al cumplimiento de objetivos preestablecidos, dentro de un determinado estado de la naturaleza. En ese proceso se compilan las informaciones que se posean y las que se reciban relacionadas con el problema a resolver. Cuanto más completas y objetivas sean esas informaciones, mayores serán las posibilidades de tomar la mejor decisión.

Se llama *estado de la naturaleza* al conjunto de circunstancias que influirán sobre los resultados de las decisiones que se tomen, pero sobre las cuales el tomador de decisión no puede actuar: características del mercado, condiciones de importación, legislación pertinente, etc.

En el proceso de toma de decisiones estarán incluidos, en general, los siguientes elementos:

- 1.- Uno o más *tomadores de decisión* que buscan cumplimentar un grupo de *objetivos*.
- 2.- Un conjunto A de m posibles *acciones* o *alternativas*  $a_i$ , entre las que puede elegir:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_m]$$

- 3.- Un conjunto de posibles *resultados*, originado cada uno de ellos por la instrumentación de cada acción  $a_i$ .

- 4.- Un conjunto  $\theta$  de n posibles estados de la naturaleza  $\theta_j$ , relacionados con los objetivos deseados:

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$$

5.- Una *función objetivo o función de consecuencias*  $F$ , que expresa el rendimiento global del sistema, vinculando las acciones  $a_i$  con los resultados en el entorno  $\theta_j$ :

$$F = f(a_i, \theta_j)$$

El grado de conocimiento que tenga el tomador de decisión sobre el estado de la naturaleza determina una diferencia importante entre los distintos casos que se le presentan, que se pueden clasificar en la siguiente forma:

- 1.- Procesos de decisión en condiciones de *certeza*;
- 2.- Procesos de decisión en condiciones de *riesgo*;
- 3.- Procesos de decisión en condiciones de *incertidumbre*.

En los procesos de decisión en condiciones de certeza o deterministas, el tomador de decisión conoce de antemano cuál será el estado de la naturaleza relacionado con sus objetivos, o sea que se supone que posee *información perfecta o completa* sobre dicho estado. De modo que selecciona el curso de acción que lo aproxima rápidamente al logro de sus objetivos. Tales problemas se resuelven, por ejemplo, por medio de programación lineal, programación dinámica, programación por camino crítico, etc.

En los procesos de decisión en condiciones de riesgo, el tomador de decisión no conoce con precisión el estado de la naturaleza, sino que posee sobre ella una *información imperfecta o parcial*. Pero le puede asignar una distribución de probabilidad, ya sea continua o discreta, y elige el curso de acción que maximiza la *esperanza matemática*, o sea el que posee el *máximo valor esperado* para acercarlo al logro de sus objetivos. Cada solución puede ocurrir con determinada distribución de probabilidad.

Se puede plantear la siguiente :

ESTADOS DE LA NATURALEZA

DECISIÓN	$\theta_1$	$\theta_2$	....	$\theta_j$	....	$\theta_n$
$A_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	....	$a_{1j}$	....	$a_{1n}$
$A_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	....	$a_{2j}$	....	$a_{2n}$
....	....	....	....	....	....	....
$A_i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	....	$a_{ij}$	....	$a_{in}$
....	....	....	....	....	....	....
$A_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	....	$a_{mj}$	....	$a_{mn}$
PROB( $\theta_j$ )	$P(\theta_1)$	$P(\theta_2)$	....	$P(\theta_j)$	....	$P(\theta_n)$

Tabla 1 - Matriz de consecuencias

Los valores  $P(\theta_j)$  de la última línea son las probabilidades previas de cada uno de los estados de la naturaleza, que, desde luego, deben satisfacer la igualdad:

$$P(\theta_1) + P(\theta_2) + \dots + P(\theta_j) + \dots + P(\theta_n) = 1 \quad (1)$$

Si no se pueden determinar estos valores, se puede aplicar el criterio de Laplace, que acepta (aunque perdiendo precisión) que todos esos estados de la naturaleza son equiprobables, o sea que:

$$P(\theta_1) = P(\theta_2) = \dots = P(\theta_n)$$

Es decir que cada probabilidad toma el valor  $P(\theta_j) = \frac{1}{n}$

En los procesos de decisión en condiciones de incertidumbre, la información sobre los distintos estados de la naturaleza no sólo es imperfecta o parcial, sino que, en principio, no se conoce la distribución de probabilidad de los mismos. No obstante, dada la naturaleza subjetiva de las probabilidades, siempre es posible hacer una evaluación y asignar una distribución de probabilidad a cada estado, de modo que se pueden tratar en un mismo conjunto con los procesos de decisión en condiciones de riesgo.

Por otra parte, los problemas de decisión se pueden dividir en:

- 1.- Problemas de decisión *estáticos o terminales*, en los cuales el tomador de decisión debe seleccionar un curso de acción en una sola oportunidad.
- 2.- Problemas de decisión *dinámicos o secuenciales*, en los que debe elegir cursos de acción en varias oportunidades.

Frente a cada problema de toma de decisiones en condiciones de incertidumbre y de riesgo, el tomador de decisión debe seguir los siguientes pasos:

- 1.- *Estimar y asignar probabilidades* a los distintos estados de la naturaleza y valores de utilidad a las consecuencias de cada combinación posible estado-acción.
- 2.- Calcular la *utilidad esperada* para cada acción.

3.- Seleccionar la acción que *maximiza* la utilidad esperada o *minimiza* la pérdida esperada.

Por otra parte, el tomador de decisión puede optar por realizar experimentaciones o, en general, adquirir mayor información sobre los posibles estados de la naturaleza y sobre las consecuencias derivadas de la elección de cada uno de los distintos cursos de acción disponibles. Pero debe tener en cuenta que ello requiere de cierto tiempo (que puede retrasar la decisión) y que tiene un costo que, en ciertos casos, puede ser mayor que el aumento de utilidad que se obtendría disponiendo de esa información adicional.

Cuando puede hacerse experimentación, los problemas de toma de decisión en condiciones de riesgo y de incertidumbre pueden resolverse por medio de la Teoría *Estadística Clásica*, ya que su metodología se basa en la realización de pruebas de hipótesis. La Teoría Estadística de las Decisiones, en cambio, comprende técnicas que permiten resolver esos problemas tanto cuando puede hacerse la experimentación como cuando no puede realizarse. Entre estas técnicas se encuentra la *Teoría Bayesiana de Decisión*, basada en el *Teorema de Bayes*, en la que se introduce el concepto de *probabilidad posterior* o probabilidad a posteriori.

### **Teorema de Bayes**

Este Teorema establece que, dado un suceso aleatorio  $O_k$  cuya ocurrencia depende de que necesariamente se haya cumplido uno de los sucesos independientes  $(\theta_1), (\theta_2), \dots, (\theta_n)$  (ver Figura 1), la probabilidad de que junto con  $O_k$  se haya producido un determinado suceso  $\theta_j$ , o sea la probabilidad condicional posterior del suceso  $\theta_j$ , está dada por la expresión:

$$P(\theta_j / O_k) = \frac{P(\theta_j) \cdot P(O_k / \theta_j)}{\sum_{j=1}^n P(\theta_j) \cdot P(O_k / \theta_j)} \quad (2)$$

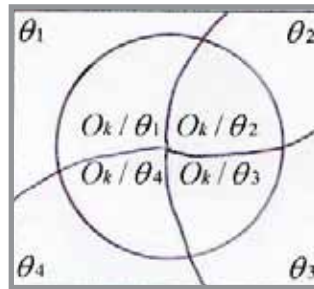


Figura 1

Para deducir e interpretar la fórmula (2) es necesario recordar los siguientes conceptos fundamentales del cálculo de probabilidades:

1.- La probabilidad de que ocurra un suceso  $\theta$  es igual al cociente entre el número  $n$  de veces en los que tiene lugar el suceso, llamado *casos favorables*, y el número total  $N$  de *casos igualmente posibles*.

$$p = P(\theta) = \frac{n}{N} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} \quad (3)$$

2.- *Probabilidad previa o a priori* es la probabilidad que se puede determinar antes de que ocurran los sucesos, por sus propias características. Por ejemplo, la probabilidad de obtener caras en  $N$  lanzamientos de una moneda, dado que en cada lanzamiento el número de casos favorables es  $\frac{1}{2}$ , resulta:

$$p = P(\theta) = \frac{n}{N} = \frac{\frac{1}{2}N}{N} = \frac{1}{2}$$

3.- *Probabilidades de sucesos excluyentes*: Dos o más sucesos son mutuamente excluyentes o incompatibles cuando la ocurrencia de uno cualquiera de ellos imposibilita la ocurrencia de todos los otros. Sean, por ejemplo, tres sucesos excluyentes  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Si para  $N$  operaciones ocurre  $n_1$  veces el suceso  $\theta_1$ ,  $n_2$  veces el suceso  $\theta_2$  y  $n_3$  veces el suceso  $\theta_3$ , las probabilidades de cada uno de los sucesos son:

$$P(\theta_1) = \frac{n_1}{N} \quad ; \quad P(\theta_2) = \frac{n_2}{N} \quad ; \quad P(\theta_3) = \frac{n_3}{N}$$

La probabilidad de que ocurra uno cualquiera de los sucesos  $\theta_1, \theta_2, \text{ o } \theta_3$ , siendo  $n_1, n_2$  y  $n_3$  los números de sucesos favorables de cada uno de ellos, tiene como número total de sucesos favorables la suma de los números de sucesos favorables individuales, de modo que resulta:

$$P(\theta_1 \text{ o } \theta_2 \text{ o } \theta_3) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{N} = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \frac{n_3}{N} = P(\theta_1) + P(\theta_2) + P(\theta_3) \quad (4)$$

O sea que la probabilidad de que ocurra uno cualquiera de los sucesos es igual a la suma de las probabilidades individuales de cada uno de ellos.

**4.- Sistema completo.** Si los sucesos  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  son todos los que pueden ocurrir y en cada operación aislada sólo puede ocurrir uno de ellos, constituyen un sistema completo. Cada uno de estos sucesos es mutuamente excluyente con cualquiera de los otros, por lo cual, de acuerdo con la ecuación (3), es:

$$\begin{aligned} P(\theta_1 \text{ o } \theta_2, \dots, \text{ o } \theta_n) &= P(\theta_1) + P(\theta_2) + \dots + P(\theta_n) \\ &= \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \dots + \frac{n_n}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_n}{N} = \frac{N}{N} = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

La (5) expresa la certeza de la ocurrencia de alguno de los sucesos mencionados.

**5.- Probabilidad condicional.** Si dados dos sucesos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , para que ocurra  $\theta_2$  debe ocurrir primeramente  $\theta_1$ , significa que el suceso  $\theta_2$  es dependiente del suceso  $\theta_1$ . La probabilidad de que ocurra  $\theta_2$  se llama probabilidad condicional de  $\theta_2$  dado que  $\theta_1$  se ha presentado. Se escribe:

$$P(\theta_2 / \theta_1) = P(\theta_2 \text{ dado } \theta_1) \quad (6)$$

De igual modo, si para que ocurra  $\theta_1$  debe ocurrir primeramente  $\theta_2$ , la probabilidad condicional de  $\theta_1$  dado que  $\theta_2$  se ha presentado, se expresa:

$$P(\theta_1 / \theta_2) = P(\theta_1 \text{ dado } \theta_2) \quad (7)$$

La ocurrencia simultánea de  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se denomina suceso compuesto. En un diagrama de Venn (Figura 2) este suceso es el de los puntos de la zona rayada, que corresponde a la intersección de las zonas  $\theta_1$  con  $\theta_2$ .



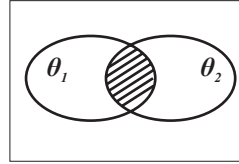


Figura 2

La probabilidad de los puntos de la zona de intersección se puede expresar:

$$P(\theta_2 \cap \theta_1) = P(\theta_1).P(\theta_2/\theta_1) \quad (8)$$

o también: 
$$P(\theta_1 \cap \theta_2) = P(\theta_2).P(\theta_1/\theta_2) \quad (9)$$

Si la ocurrencia de cualquiera de los dos sucesos no depende de que haya ocurrido el otro, ambos son independientes. En tal caso se cumple, en lugar de la (6) o la (7):

$$P(\theta_1.\theta_2) = P(\theta_1).P(\theta_2) \quad (10)$$

#### 6. - Probabilidad condicional posterior (Teorema de Bayes)

Sea un suceso aleatorio  $O_k$ , cuya ocurrencia depende de que necesariamente haya ocurrido uno de los sucesos independientes  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  (Figura 1). Si se cumple  $O_k$ , forzosamente tiene que haberse cumplido uno de los sucesos  $\theta_j$ . La probabilidad de este  $\theta_j$  es su probabilidad condicional posterior y, para determinarla, es necesario conocer las probabilidades previas de los  $n$  sucesos  $\theta_j$ ; como éstos forman un sistema completo, dichas probabilidades deben cumplir la ecuación (5)

$$P(\theta_1) + P(\theta_2) + \dots + P(\theta_n) = 1 \quad (11)$$

También se necesita conocer las probabilidades condicionales de que ocurran simultáneamente  $O_k$  y cada suceso  $\theta_j$ . Como son sucesos dependientes estas probabilidades están dadas por la (8) y la (9).

$$P(O_k \cap \theta_j) = P(\theta_j).P(O_k/\theta_j)$$

$$P(\theta_j \cap O_k) = P(O_k).P(\theta_j/O_k)$$

Igualando los segundos miembros y despejando  $P(\theta_j/O_k)$ :

$$P(\theta_j/O_k) = \frac{P(\theta_j).P(O_k/\theta_j)}{P(O_k)} \quad (12)$$

Por otra parte, la suma de las probabilidades de la ocurrencia simultánea de  $O_k$  con cada uno de los sucesos  $\theta_j$  debe ser igual a la probabilidad total de  $O_k$ .

$$P(O_k) = \sum_{j=1}^n P(O_k \theta_j) = \sum_{j=1}^n P(\theta_j) \cdot P(O_k / \theta_j) \quad (13)$$

Reemplazando esta última en el denominador de la (12) se llega a la fórmula de Bayes, que da la probabilidad condicional posterior de cada suceso  $\theta_j$ :

$$P(\theta_j / O_k) = \frac{P(\theta_j) \cdot P(O_k / \theta_j)}{\sum_{j=1}^n P(\theta_j) \cdot P(O_k / \theta_j)} \quad (14)$$

El criterio de Bayes considera que, si no hay experimentación, utilizando la distribución de probabilidades previas  $q_j = P(\theta_j)$  se debe seleccionar la estrategia  $(a_i)$  a la que corresponde el máximo valor esperado

$$\text{Máx } E(a_i) = \text{Máx}_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_j = \text{Máx}_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot P(\theta_j) \quad , \quad (15)$$

si se trata de una ganancia, o el mínimo valor esperado, si se trata de una pérdida.

Si se realiza experimentación (o, en general, se consigue información adicional) la fórmula (14) permite determinar la distribución de probabilidades posteriores, que es la distribución condicional del estado de la naturaleza  $\theta_j$  dado el resultado de la experimentación  $P(\theta_j / O_k)$ .

Aplicaremos este criterio a un problema económico concreto.

### Problema de Aplicación

Una empresa debe decidir si instala o no una sucursal en una determinada ciudad. Tiene incertidumbre sobre si las ventas allí serán buenas ( $\theta_1$ ), regulares ( $\theta_2$ ) o malas ( $\theta_3$ ), pero estima las siguientes probabilidades previas para esos estados:

$$\text{Buenas: } P(\theta_1) = 0,3; \quad \text{Regulares: } P(\theta_2) = 0,2 \quad ; \quad \text{Malas: } P(\theta_3) = 0,5$$

Si las ventas son malas no producirán ingresos netos: si son regulares, producirán un ingreso promedio de \$ 200000

mensuales: y si son buenas, un ingreso promedio de \$ 400000 mensuales. El costo de la instalación se estima en \$ 150000.

Se puede realizar una encuesta sobre la aceptación del producto con respecto a los de la competencia, cuyo costo sería de \$ 7500; sus resultados podrían ser:

$O_1$ :muy buena aceptación;  $O_2$ :regular aceptación;  $O_3$ :poca aceptación.

Las encuestas realizadas en otras oportunidades en ciudades similares de la zona, han dado, en promedio, la siguiente distribución de probabilidades condicionales para sus resultados:

Previsión de ventas	Aceptación MB ( $O_1$ )	Aceptación Reg. ( $O_2$ )	Aceptación Mala ( $O_3$ )	
Buena ( $\theta_1$ )	$P(O_1/\theta_1)=0,6$	$P(O_2/\theta_1)=0,3$	$P(O_3/\theta_1) = 0,1$	$\sum_{k=1}^3 P(\theta_1 / O_k) = 1$
Regular( $\theta_2$ )	$P(O_1/\theta_2)=0,4$	$P(O_2/\theta_2)=0,4$	$P(O_3/\theta_2) = 0,2$	$\sum_{k=1}^3 P(\theta_2 / O_k) = 1$
Mala ( $\theta_3$ )	$P(O_1/\theta_3)=0,1$	$P(O_2/\theta_3) = 0,4$	$P(O_3/\theta_3) = 0,5$	$\sum_{k=1}^3 P(\theta_3 / O_k) = 1$

**Tabla 1** - Probabilidades condicionales  $P(O_k/\theta)$ .

Se debe decidir si se instala ahora la sucursal o se realiza previamente la encuesta. Si se realiza esta última, cuáles son las acciones a tomar para cada resultado de la misma, con el criterio del Máximo Valor Esperado (MVE).

*Primer análisis: Acción óptima sin la encuesta*

ACCIÓN	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
$a_1$ - Instalar	\$ 400000	\$ 200000	- \$ 150000
$a_2$ - No instalar	0	0	0

$P(\theta_1)=0,3$                        $P(\theta_2) = 0,2$                        $P(\theta_3) = 0,5$

**Tabla 2** - Matriz de decisión con las probabilidades previas.

Los valores de la esperanza matemática para cada acción, son:

$$E(a_1) = \$ 400000 \cdot 0,3 + \$ 200000 \cdot 0,2 - \$ 150000 \cdot 0,5 = \$ 85000$$

$$E(a_2) = 0$$

El máximo valor esperado bajo incertidumbre se obtiene para la acción  $a_1$ , Instalar. Si se decide realizar la encuesta

para tener mayor información, se debe comenzar por calcular el valor esperado de la información perfecta: (VEIP)

$$\begin{aligned} \text{VEIP} &= \text{MVE con información perfecta} - \text{MVE con incertidumbre} \\ &= \left[ \sum_{j=1}^3 P(\theta_j) \cdot \text{Máx } a_{ij} \right] - [\text{Máx } E(a_i)] \\ &= 400000 \cdot 0,3 + 200000 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,2 - 85000 = \$ 75000 \end{aligned}$$

Es decir que la empresa debería estar dispuesta a pagar por la encuesta hasta la suma de \$ 75000, ya que con ella no disminuiría la utilidad.

#### *Análisis posterior, con el árbol de decisión*

El árbol de decisión (Figura 3) se construye partiendo del nodo inicial  $a_0$ , del que parten las ramas de alternativas  $a_0$  (sin realizar la encuesta) y  $a_1$  (realizando la encuesta). La decisión  $a_0$  llega al nodo de decisión  $b_0$ , del que parten las ramas de decisión No instalar, que es terminal, con utilidad 0, e Instalar con un MVE de \$ 85000, que llega al nodo de posibilidades 1. Lógicamente, se descarta la rama No instalar. A continuación del nodo 1 se trazan las ramas que corresponden a los estados de la naturaleza  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , y  $\theta_3$ , que se registran con sus respectivas probabilidades. En los extremos se anotan los valores esperados de la Tabla 1 de consecuencias. Éste es el análisis con las probabilidades previas.

Para la rama  $a_1$  que parte del nodo inicial, con la encuesta, del nodo de posibilidades 2 parten las ramas con los distintos valores  $O_k$  de la encuesta. Estas ramas concluyen en los nodos de decisión  $c$ ,  $d$  y  $e$ , de los cuales parten las ramas correspondientes a Instalar y No instalar. Las ramas No instalar son terminales, ya que su MVE = 0. Las ramas correspondientes a Instalar terminan en los nodos de posibilidad 3, 4 y 5, y de éstos parten las ramas de los posibles estados de la naturaleza con sus respectivas probabilidades posteriores  $P(\theta_j / O_k)$ , y en sus extremos se registran los distintos valores esperados. Se elige la acción Instalar para los nodos  $c$  y  $d$ , y la acción No instalar para el nodo  $e$ . El máximo valor esperado para el nodo 2 resulta de \$ 102480.

Los valores de las probabilidades posteriores se calculan con la ecuación (13) del Teorema de Bayes:

$$P(\theta_j / O_k) = \frac{P(\theta_j) \cdot P(O_k / \theta_j)}{\sum_{j=1}^3 P(\theta_j) \cdot P(O_k / \theta_j)}$$

Los numeradores del segundo miembro expresan, para cada valor de  $j$ , la probabilidad conjunta del estado de la naturaleza  $\theta_j$  con el resultado de la encuesta  $O_k$  y se calculan haciendo los productos de cada probabilidad previa dada  $P(\theta_j)$  -ver Tabla 2- multiplicada por cada probabilidad condicional de los resultados de la prueba,  $P(O_k / \theta_j)$ , dado que se ha producido el estado de la naturaleza  $\theta_j$  (Tabla 1). Así se obtiene:

Para  $j=1$ :

Para  $k=1$ ,  $P(\theta_1) \cdot P(O_1 / \theta_1) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$   
 Para  $k=2$ ,  $P(\theta_1) \cdot P(O_2 / \theta_1) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$   
 Para  $k=3$ ,  $P(\theta_1) \cdot P(O_3 / \theta_1) = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$

Para  $j=2$ :

Para  $k=1$ ,  $P(\theta_2) \cdot P(O_1 / \theta_2) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$   
 Para  $k=2$ ,  $P(\theta_2) \cdot P(O_2 / \theta_2) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$   
 Para  $k=3$ ,  $P(\theta_2) \cdot P(O_3 / \theta_2) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$

Para  $j=3$ :

Para  $k=1$ ,  $P(\theta_3) \cdot P(O_1 / \theta_3) = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05$   
 Para  $k=2$ ,  $P(\theta_3) \cdot P(O_2 / \theta_3) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,20$   
 Para  $k=3$ ,  $P(\theta_3) \cdot P(O_3 / \theta_3) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$

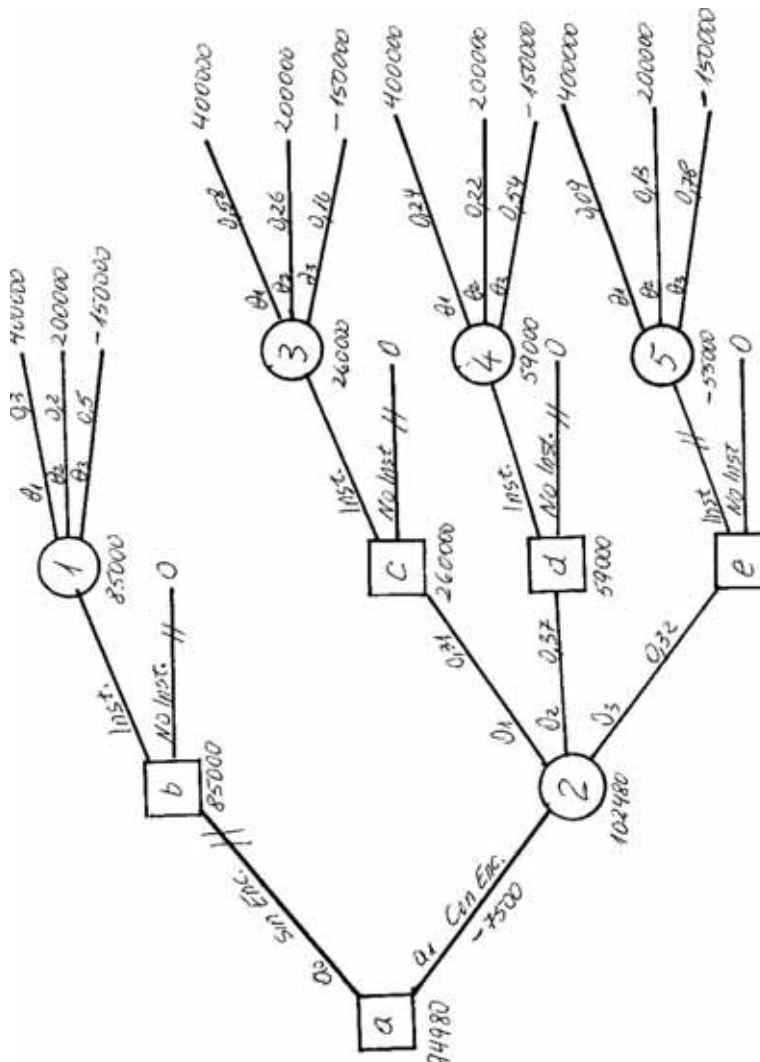


Figura 3

Los productos hallados están registrados en la Tabla 3, donde se los ha sumado por columna para determinar los términos  $P(O_k)$ , llamados probabilidades marginales, del denominador de la fórmula de Bayes (ecuación 14).

La división de cada elemento de la Tabla 3 por la suma de su columna es la división de la fórmula de Bayes que da cada una de las probabilidades posteriores  $P(\theta_j / O_k)$ . Por ejemplo, para la primera columna:

ESTADO DE LA NATURALEZA $\theta_j$	$P(\theta_j).P(O_1/\theta_j)$	$P(\theta_j).P(O_2/\theta_j)$	$P(\theta_j).P(O_3/\theta_j)$	
$\theta_1$	0,18	0,09	0,03	0,30
$\theta_2$	0,08	0,08	0,20	0,20
$\theta_3$	0,05	0,20	0,25	0,50
PROB. MARG. $\sum_{j=1}^3 P(\theta_j).P(O_k/\theta_j)$	0,31	0,37	0,32	1,00
			(0,31+0,37+0,32=1)	

**Tabla 3** - Probabilidades conjuntas  $P(\theta_j).P(O_k / \theta_j)$  y marginales  $P(O_k)$ .

$$\frac{0,18}{0,31} = 0,58 = P(\theta_1 / O_1)$$

$$\frac{0,08}{0,31} = 0,26 = P(\theta_2 / O_1)$$

$$\frac{0,05}{0,31} = 0,16 = P(\theta_3 / O_1)$$

Los distintos resultados se registran en la Tabla 4.

ESTADO DE LA NATURALEZA	$P(\theta_j / O_1)$	$P(\theta_j / O_2)$	$P(\theta_j / O_3)$
$\theta_1$	0,58	0,24	0,09
$\theta_2$	0,26	0,22	0,13
$\theta_3$	0,16	0,54	0,78
$\sum_{j=1}^3 P(\theta_j / O_k)$	1,00	1,00	1,00

**Tabla 4** - Probabilidades posteriores  $P(\theta_j/O_k)$ .

Los valores de las probabilidades marginales obtenidos como sumas de las columnas de la Tabla 3 se colocan en las ramas del árbol de decisión que parten del nodo de posibilidades 2. En las ramas que parten de los nodos de posibilidades 3, 4 y 5 se anotan las probabilidades posteriores halladas en la Tabla 4. Comparando estas probabilidades posteriores con las probabilidades previas dadas como datos para la previsión de ventas, se observa:

- Rama  $O_1$  – Muy buena aceptación -  $P(\theta_1 / O_1) = 0,58 > P(\theta_1) = 0,3$   
 $P(\theta_2 / O_1) = 0,26 > P(\theta_2) = 0,2$   
 $P(\theta_3 / O_1) = 0,16 < P(\theta_3) = 0,5$

Para este resultado de la encuesta, la probabilidad de alcanzar un nivel de ventas bueno aumenta de 0,3 a 0,58.

- Rama  $O_2$  – Aceptación regular -  $P(\theta_1 / O_2) = 0,24 < 0,3$   
 $P(\theta_2 / O_2) = 0,22 > 0,2$   
 $P(\theta_3 / O_2) = 0,54 > 0,5$

- Si éste es el resultado de la encuesta, aumenta la probabilidad de que las ventas sean regulares, de 0,20 a 0,22, y de que sean malas, de 0,50 a 0,54, mientras disminuyen las probabilidades de que el nivel de ventas sea bueno, de 0,30 a 0,24.

- Rama  $O_3$  – Poca aceptación  $P(\theta_1 / O_3) = 0,09 < 0,3$   
 $P(\theta_2 / O_3) = 0,13 < 0,2$   
 $P(\theta_3 / O_3) = 0,78 > 0,5$

Con este resultado de la encuesta, aumentan las probabilidades de que el nivel de ventas sea malo, de 0,5 a 0,78, mientras disminuyen las probabilidades de que ese nivel sea bueno, de 0,3 a 0,09, o regular, de 0,2 a 0,13.

Para determinar con el árbol de decisión la estrategia óptima deducida de los distintos resultados posibles de la encuesta, se aplica el método de inducción regresiva. Se comienza por calcular los máximos valores esperados para los nodos de posibilidades 3, 4 y 5:

$$\begin{aligned} \text{Nodo 3:} & \quad MVE(3) = 400000 \cdot 0,58 + 200000 \cdot 0,26 - 150000 \cdot 0,16 = \$ 260000 \\ \text{Nodo 4:} & \quad MVE(4) = 400000 \cdot 0,24 + 200000 \cdot 0,22 - 150000 \cdot 0,54 = \$ 59000 \\ \text{Nodo 5:} & \quad MVE(5) = 400000 \cdot 0,09 + 200000 \cdot 0,13 - 150000 \cdot 0,78 = \$ - 55000 \end{aligned}$$

Se hace lo mismo para los nodos de decisión c, d y e:

$$\begin{aligned} \text{Nodo c:} & \quad MVE(c) = \text{Máx}(260000; 0) = \$ 260000 - \text{Instalar. Se anula No inst.} \\ \text{Nodo d:} & \quad MVE(d) = \text{Máx}(59000; 0) = \$ 59000 - \text{Instalar. Se anula No inst.} \\ \text{Nodo e:} & \quad MVE(e) = \text{Máx}(-55000; 0) = \$ 0 - \text{No instalar. Se anula inst.} \end{aligned}$$

Para el nodo de posibilidades 2, el máximo valor esperado es:

$$\text{Nodo 2:} \quad MVE(2) = 260000 \cdot 0,31 + 59000 \cdot 0,37 = \$ 102480$$

Restando de este valor el costo de la encuesta, se obtiene el valor para el nodo a:

$$\text{Nodo a:} \quad MVE(a) = \text{Máx}[(102480 - 7500); 85000] = \$ 94980$$



Se observa que si el resultado de la encuesta sobre la aceptación del producto es muy bueno, ( $O_1$ ), o regular ( $O_2$ ), la acción más conveniente es instalar. Si ese resultado es poca aceptación, no conviene instalar. Los valores hallados para este análisis posterior están agrupados en la siguiente Tabla 5:

ACEPTACIÓN $O_k$	ESTADO NAT. $\theta_j$	PROB. POST. $P(\theta_j / O_k)$	INSTALAR	NO INSTALAR
$O_1$ - Buena	$\theta_1$ Vta. Buena	0,58	400000	0
	$\theta_2$ Vta. Regular	0,26	200000	0
	$\theta_3$ Vta. Mala	0,16	- 150000	0
	Máx. Valor Esp		260000 (Máx)	0
$O_2$ - Regular	$\theta_1$ Vta. Buena	0,24	400000	0
	$\theta_2$ Vta. Regular	0,22	200000	0
	$\theta_3$ Vta. Mala	0,54	-150000	0
	Máx. Valor Esp		59000 (Máx)	0
$O_3$ - Poca	$\theta_1$ Vta. Buena	0,09	400000	0
	$\theta_2$ Vta. Regular	0,13	200000	0
	$\theta_3$ Vta. Mala	0,78	-150000	0
	Máx. Valor Esp		0(Máx)	0

**Tabla 5** - Análisis posterior.

La decisión de realizar o no la encuesta depende del MVE para el nodo de decisión 2, que es de \$ 102480. El retorno esperado neto es igual a este valor menos el costo de la encuesta, que es de \$ 7500, resultando \$ 94980, valor mayor que sin hacer la encuesta, que es de \$ 85000.

### **Bibliografía**

MOSKOWITZ, H. y WRIGHT, G. (1979). *Investigación de operaciones*. Prentice-Hall Hispanoamericana. México.

MASON, R., LIND, D. y MARCHAL, W. (2000). *Estadística para Administración y Economía*. Alfaomega. México.

ANDERSON, D., SWEENEY, D. y WILLIAMS, T. (2004). *Métodos cuantitativos para los negocios*. Thomson. México.

# MÉTODOS PARA ESTIMAR EL COMPONENTE CÍCLICO EN SERIES TEMPORALES CON APLICACIONES AL PRODUCTO BRUTO INTERNO POR HABITANTE EN ARGENTINA

## Primera Parte

(\*) Investigador de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Morón, y Economista Senior en el Economic Research Institute of Northern Ireland, Belfast, Irlanda del Norte, Reino Unido.

por el Prof. José Luis Iparraguirre D`Elía (\*)

### 1. Introducción

Para realizar estudios acerca de fluctuaciones cíclicas en variables económicas medidas a lo largo del tiempo o para analizar la tendencia de largo plazo de las mismas, se requiere extraer el componente cíclico de las series de tiempo. Una de las formas de proceder a ello es recurrir a un filtro –es decir a un estimador matemático del componente tendencial de largo plazo de una serie.

Tradicionalmente, se supone que una serie temporal es la resultante de la suma de componentes ortogonales no observables. Entre ellos, se encuentran el componente tendencial, el componente cíclico, el componente estacional y un término irregular o de ruido (a veces, dependiendo de la variable bajo análisis y de su frecuencia, se incluye un componente adicional, el “efecto calendario”, que recoge el impacto de eventos con ocurrencia en momentos puntuales pero recurrentes a lo largo del tiempo, como Pascuas, Navidad, Día de la Madre, etc.).

En este artículo vamos a reseñar los principales métodos univariados para estimar el componente cíclico en una serie temporal de manera mecánica –proceso llamado ‘filtrado’– y aplicarlos a efectos de ilustrar las diferentes estimaciones resultantes a algunas series históricas de variables macroeconómicas de la República Argentina. Vamos muy brevemente a comentar los aspectos macroeconómicos en

sí, y enfocaremos nuestra exposición en las cuestiones matemático-estadísticas. Para una discusión más en profundidad de aspectos económicos vinculados con las fluctuaciones del Producto Bruto Interno y otras variables macroeconómicas en Argentina, ver Sturzenegger y Moya (2003), Trajtenberg (2004), Jorrat (2004), y Baccino (2006).

Por sencillez expositiva hemos omitido en todo el trabajo la inclusión de un componente estacional y el efecto calendario puesto que vamos a trabajar con series anuales o con series trimestrales desestacionalizadas, con lo cual ni la estacionalidad ni el efecto calendario son aspectos relevantes. Omitiendo, entonces, estos componentes, toda serie de tiempo de una variable macroeconómica puede descomponerse canónicamente en:

$$y_t = f(g_t, c_t, \varepsilon_t) \quad (1a)$$

donde

$g_t$  es la tendencia de largo plazo,  $c_t$  corresponde al elemento cíclico y  $\varepsilon_t$  es el componente irregular. Por lo general se supone que los componentes son aditivos, con lo que (1a) se representa:

$$y_t = g_t + c_t + \varepsilon_t \quad (1b)$$

Por lo general, los filtros permiten calcular la tendencia de largo plazo, con lo que el componente cíclico resulta de restar el valor resultante de aplicar el filtro a la serie original –decimos “por lo general” pues, como vamos a ver, hay filtros que distinguen el término irregular pero otros no y hay filtros que detectan cada componente según la frecuencia.

Antes de avanzar conviene aclarar que aparte de utilizar filtros –que no son sino el resultado de transformaciones de una serie temporal–, otra estrategia para la extracción del componente de tendencia o el cíclico consiste en recurrir a modelos económicos y a técnicas multivariadas, lo cual no es objeto del presente trabajo.

Este trabajo está dividido en dos partes. En esta primera parte, presentaremos los filtros más habituales: tendencia polinómica, combinaciones de tendencias según quiebres estructurales, el filtro Hodrick-Prescott de una banda y de doble paso de banda, y el filtro de Baxter-King. La segunda parte versará sobre el filtro de Christiano-Fitzgerald, el filtro de Butterworth y el método de Wavelets. Asimismo hablaremos acerca de volatilidad cíclica y correlación intercíclica.

## 2. Datos

Las series de datos a utilizar son los componentes de la demanda y oferta global (Producto Bruto Interno, Importaciones, Consumo Privado, Consumo Público, Inversión Interna Bruta Fija, Exportaciones). Valores trimestrales desestacionalizados entre 1993-Q1 y 2008-Q1. Todas las series expresadas a precios de mercado de 1993 y elaboradas por el INDEC. De las estimaciones de Exportaciones e Importaciones hemos calculado asimismo el Balance Comercial correspondiente a cada trimestre. También, presentamos una serie de mayor duración: la del Producto Bruto Interno en dólares de 2000 entre 1950 y 2006 (valores anuales) y estimaciones de población total para el mismo período, ambas elaboradas por la CEPAL. Las figuras 1a-1b presentan las series (en logaritmos naturales):

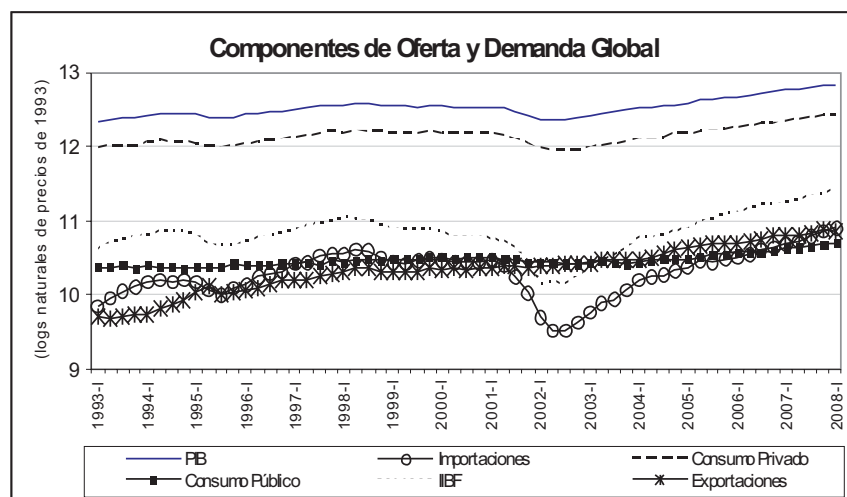


Figura 1a.



Figura 1b.

La pregunta de investigación es cuál es el proceso cíclico ínsito en una serie temporal como la de las figuras 1a-1b. Para ello recurrimos al filtrado.

## 2. Filtros más comunes en aplicaciones económicas

### 2.a. Tendencia lineal

Éste es un método muy sencillo que consiste simplemente en estimar una recta de ajuste de la serie temporal –tras aplicar logaritmos– por mínimos cuadrados. La diferencia entre la serie original y la tendencia obtenida corresponde al componente cíclico.

Entonces, el método consiste en estimar la siguiente ecuación:

$$y_t = a + bt + u_t, \quad (2)$$

donde  $y$  es la variable a analizar,  $t$  es el período y  $u$  es el término de error. Aplicada a los logaritmos del producto bruto interno entre 1950 y 2006 (fig. 1b), obtenemos la siguiente estimación:

$$y_t = -8.062 + 0.00851t + u_t \quad (R^2=0.6729), \text{ con valores } t \text{ entre paréntesis.}$$

(−5.09)    (10.63)

Como hemos estimado la tendencia lineal a una serie en logaritmos, el valor del coeficiente  $b$  corresponde al crecimiento promedio de largo plazo –es decir que el PBI habría crecido entre 1950 y 2006 un 0.85 por ciento anual–.

Este método es excesivamente cruento pues supone que la serie bajo estudio presenta una tendencia invariante a lo largo de todo el período, lo cual es un supuesto muy poco plausible. Debido a ello, una opción es recurrir a una combinación de tendencias lineales.

Por supuesto, pueden ensayarse polinomios de ajuste de mayor grado. Con una ecuación de tercer grado, hemos obtenido los siguientes valores de ajuste:

$$y_t = +8.3045 + 0.0399t - 0.001t^2 + 0.000009t^3 + u_t$$

(+187.5)   (+6.09)   (-3.892)   (+3.092)

( $R^2=0.8052$ ), con valores  $t$  entre paréntesis.

La figura 3a presenta la serie de PBI observada y las dos curvas de ajuste.

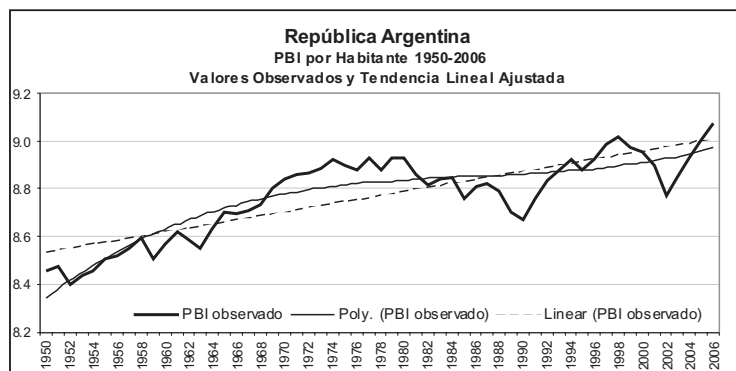


Figura 3a.

Deducidas estas ecuaciones de ajuste de la serie original observada, obtenemos los ciclos presentados en la figura 3b:

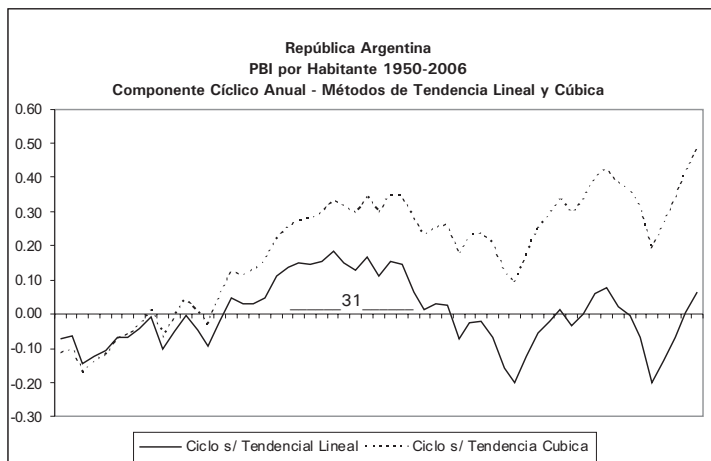


Figura 3b.

2.b. Combinación de tendencias

Este método comienza por la detección de uno o más quiebres estructurales en la serie temporal a analizar, por medio de pruebas de raíces unitarias. Cada quiebre define subperíodos dentro de la serie. Detectados estos quiebres, se procede a estimar la tendencia –que generalmente se supone lineal– dentro del subperíodo correspondiente siguiendo el procedimiento del apartado anterior.

Hemos corrido el paquete *tsseries* del programa *R* a la serie de PBI de 1950-2006 y hemos detectado cuatro quiebres estructurales, con lo cual tenemos cinco subperíodos: 1950-1980, 1980-1990, 1990-1999, 1999-2002 y 2002-2006. Las estimaciones de tendencia de cada subperíodo se presentan en la figura 4a y el ciclo resultante, en la figura 4b.

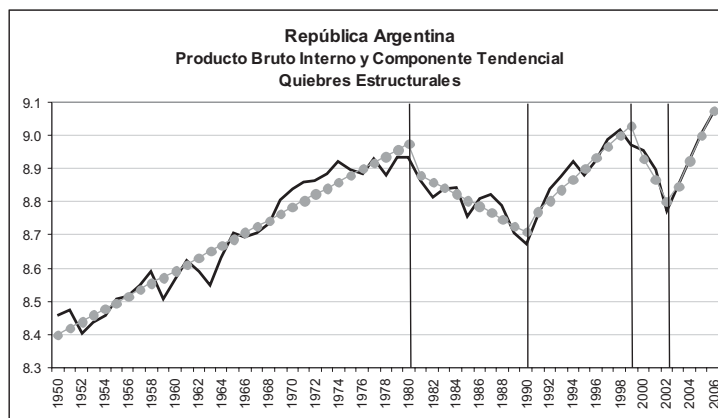


Figura 4a.



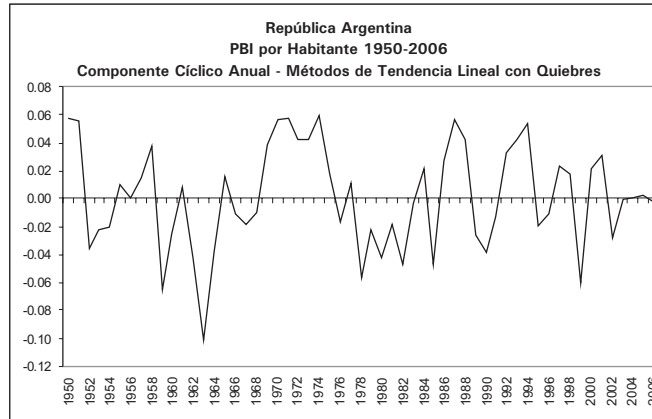


Figura 4b.

Este procedimiento supone tendencias lineales quebradas. El siguiente filtro estima un componente tendencial no lineal continuo.

### 2.c. Filtro Hodrick-Prescott

El filtro Hodrick-Prescott es el más utilizado en la literatura académica especializada. Para extraer la tendencia de largo plazo, este filtro minimiza la siguiente expresión:

$$\min_{\{g_t\}_{t=1}^T} \left\{ \left[ \sum_{t=1}^T (y_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=3}^T [(g_t - g_{t-1}) + (g_{t-1} - g_{t-2})]^2 \right] \right\} \quad (3)$$

El primer término,  $\sum_{t=1}^T (y_t - g_t)^2$ , es la diferencia cuadrática entre los valores de la serie original y el componente tendencial –refleja la bondad de ajuste de la tendencia–.

El parámetro clave en la expresión (3) es  $\lambda$ , el parámetro de suavización, que penaliza los desvíos de la tendencia –es decir, las diferencias segundas cuadráticas del componente tendencial que se incluyen dentro del corchete–: cuanto mayor es el valor de este parámetro, más suavizado será el componente cíclico estimado.

Hodrick y Prescott (1980) recomiendan fijar el valor del parámetro igual a 100 para datos anuales –aunque, por ejemplo, Backus *et al.* (1999) sugieren  $\lambda = 400$  mientras que Ravn y Uhlig (1997) recomiendan  $\lambda=6.25$ .

El valor del parámetro recomendado por Hodrick y Prescott surge de suponer que el componente cíclico tiene un

desvío estándar de 5 puntos porcentuales a lo largo de la serie, con lo que el primer término es igual a 5 y que las diferencias segundas presentan un desvío estándar de  $1/2$ , con lo cual:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{5}{1/2} \rightarrow \lambda = 100 \quad (4)$$

El filtro introduce el supuesto de que el desvío estándar del ciclo, es decir, de la diferencia entre la serie temporal original y el componente tendencial, es igual al 5 por ciento -recordemos que este primer término de la expresión (3)-corresponde a una medida de la bondad de ajuste, con lo que estamos suponiendo un nivel de confianza del 95 por ciento. Asimismo se supone que la periodicidad de la serie original define el valor del parámetro de suavización con razón igual a 2. Para datos trimestrales, entonces, el valor sugerido es  $\lambda=1600$ , pues se supone que el desvío estándar de las diferencias segundas es igual a  $1/8$ , mientras que si tenemos datos semestrales, el desvío estándar es igual a  $1/4$ , y el parámetro de suavización resulta ser 400.

Hemos utilizado el valor recomendado por Hodrick y Prescott, dado que utilizamos datos anuales. La figura 5a. presenta los resultados de aplicar el filtro a los datos anuales de PBI desde 1950 ( $\lambda=100$ ). La figura 5b. presenta los resultados de aplicar el filtro a los datos trimestrales de PBI desde 1993 ( $\lambda=1600$ ).

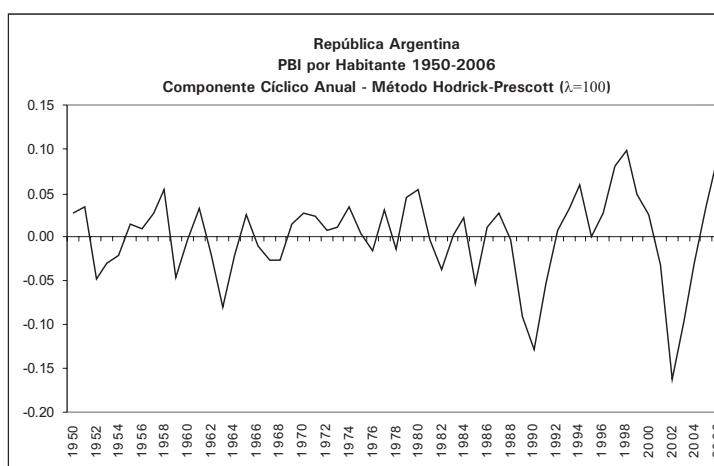


Figura 5a.

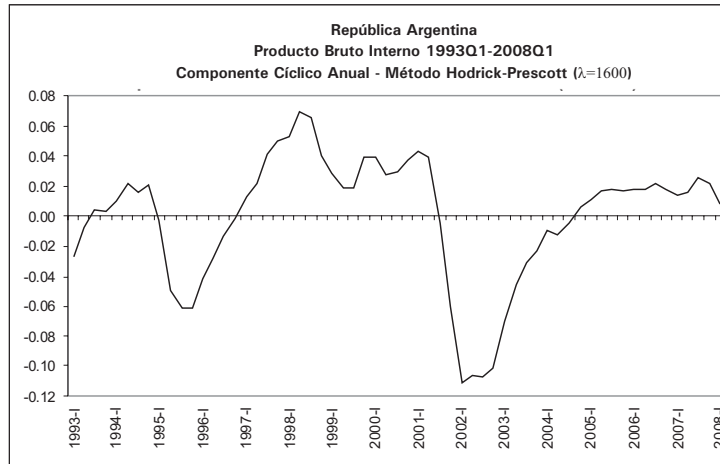


Figura 5b.

### 3. Filtro de Hodrick-Prescott de doble paso de banda

El filtro de Hodrick-Prescott presentado anteriormente se conoce como filtro de paso bajo, pues no distingue entre componente cíclico y componente irregular.

Los componentes tendencial, cíclico e irregular de una serie temporal presentan distintas frecuencias. Recordemos que la frecuencia de un proceso cíclico es la cantidad de ciclos completos que ocurren en un determinado período de tiempo. La tendencia suele variar solamente a largo plazo, con lo que su frecuencia es baja. Un ciclo se completa entre 6 y 32 cuatrimestres<sup>1</sup>, con lo que su frecuencia es más alta que la del componente tendencial. Por su parte, el componente irregular presenta una elevada variabilidad, con lo que su frecuencia es alta. Dado que el filtro de Hodrick-Prescott no distingue entre ciclo en sí y componente irregular, subsume las frecuencias medias y altas en un solo valor –que se define como el ciclo–<sup>2</sup>.

Los filtros de paso de banda remueven las frecuencias entre un límite inferior y uno superior del espectro, con lo que remueven el componente tendencial y el irregular, extrayendo entonces el componente cíclico, evitando el hecho espurio de definir como ciclo lo que es un término de error estocástico.

(1) Definición operacional de Baxter-King (1999).

(2) No es la única crítica que ha recibido el filtro de Hodrick-Prescott. Por ejemplo, el segundo término de la expresión (2) supone un camino aleatorio de segundo orden que, por ejemplo, si la serie original sigue un proceso integrado de segundo orden –es decir,  $I(2)$ – el filtro no es aplicable. Para una discusión crítica del filtro de Hodrick-Prescott, ver Ahumada y Garegnani (1999).

Algunos autores han elaborado una versión de filtro de paso de banda del filtro Hodrick-Prescott. Para ello se estiman dos filtros HP, uno con un parámetro de suavización elevado (que capta las frecuencias altas) y otro con un valor de suavización bajo. La diferencia entre ambos correspondería al componente cíclico –es decir–, las frecuencias medias.

Hemos utilizado los siguientes valores del parámetro de suavización:  $\lambda=0.52$  y  $\lambda=2.91$ . Estos valores fueron estimados a partir de resolver las siguientes expresiones:

$$\lambda_{1,2} = \left\{ \left[ 1 - \cos(w_{1,2}) \right] \right\}^2, \tag{5}$$

donde

$w_1 = \frac{2\pi}{1.25}$  y  $w_2 = \frac{2\pi}{8}$  corresponden a las frecuencias baja y alta, respectivamente, para obtener la expresión (5).

La figura 6 presenta los resultados correspondientes a la serie de PBI desde 1950:

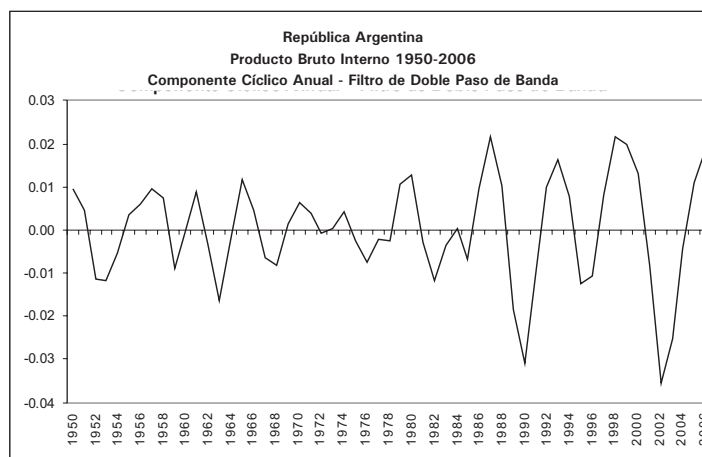


Figura 6.

*A.1.d Filtro de Baxter-King*

El filtro de Baxter-King es un filtro de paso de banda que supone que la tendencia responde a un promedio móvil finito con ponderaciones simétricas, que se expresa según la siguiente ecuación:

$$y_t = \sum_{j=-K}^{j=K} \alpha_j L^j y_t, \tag{6}$$

donde  $L^j$  denota el operador de rezagos  $L^s y_t = y_{t-s}$

Para obtener los coeficientes de ponderación  $\alpha_j$ , se debe minimizar la siguiente expresión:

$$\min_{\alpha_j} Q = \int_{-\pi}^{\pi} |\beta(\omega) - \alpha(\omega)|^2 d\omega; \text{ s.t. } \alpha(0) = 0 \quad (7)$$

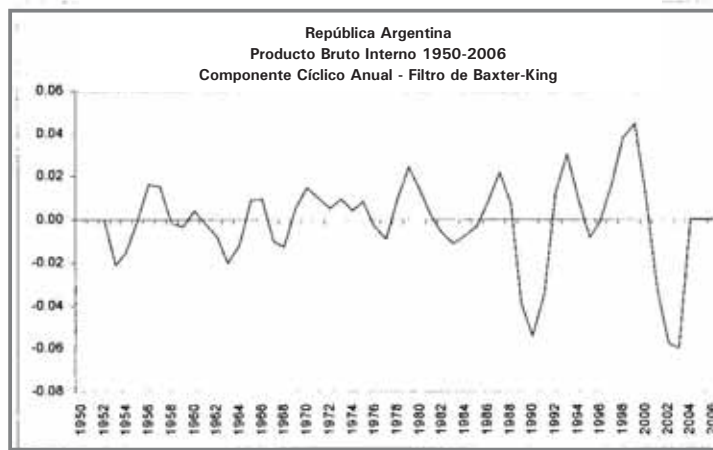
donde  $\beta(\omega) - \alpha(\omega)$  es la discrepancia entre el filtro ideal y el filtro estimado producida por la estimación de los coeficientes de ponderación y de donde resulta que:

$$\alpha_j = b_j + \phi; \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

$$b_j = \begin{cases} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\pi} & \text{si } j=0 \\ \frac{1}{\pi j} (\sin \omega_2 j - \sin \omega_1 j) & \text{si } j \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

Baxter y King recomiendan fijar  $K = 3$ ,  $\omega_1 = 2\pi \frac{1}{32}$  y  $\omega_2 = 2\pi \frac{1}{6}$  para datos anuales (En la segunda parte de este trabajo explicaremos los aspectos matemáticos detrás de estas fórmulas). Con  $K = 3$ , se pierden las tres primeras observaciones, lo cual compromete la robustez estadística de los resultados si las series temporales no son lo suficientemente largas. Los valores  $1/32$  y  $1/6$  incluidos en las expresiones de los coeficientes  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , resultan de suponer que las fluctuaciones económicas son fenómenos de mediano plazo: duran entre 6 y 32 trimestres (es decir, entre dos y ocho años). La figura 7 presenta el ciclo resultante de aplicar el filtro Baxter-King a la serie de PBI de 1950-2006.

El procedimiento ideado por Baxter-King no requiere de la fijación de un parámetro de suavización *ad hoc*, como el filtro de Hodrick-Prescott, con lo que presenta una ventaja metodológica sobre este último.



# ESTRATEGIAS PARA EL DISEÑO DE MAPAS COGNITIVOS DIFUSOS

(\*) Del Departamento de Matemática y  
(\*\*) del Departamento de Estadística.  
Ambos Departamentos de la Facultad de Economía de la Universidad Nacional del Comahue.

por los Profesores Lisandro Curia (\*), Andrea Lavalle (\*\*)  
y Federico Alegre (\*)

## Resumen

El empleo de sistemas basados en el conocimiento conjuntamente con el impacto visual que posibilita la representación gráfica de la información mediante mapas cognitivos, facilita el análisis de los contenidos temáticos de una disciplina científica particular. Estas herramientas permiten organizar e interpretar con claridad los constructos conceptuales de una estrategia operativa particular. En este trabajo se proponen estrategias destinadas a la construcción de Mapas Cognitivos Difusos (MCD). Posteriormente, se muestra a través de un ejemplo concreto cómo estas técnicas pueden ser utilizadas para analizar la evolución y el impacto que provoca en un MCD la aplicación de un nuevo conjunto de valores conceptuales en la dinámica del sistema hasta llegar al nuevo estado de equilibrio.

**Palabras Clave:** sistemas basados en conocimiento, inferencia difusa, mapas cognitivos.

## I - Introducción

Los mapas cognitivos permiten la representación gráfica de información, a través de la cual podemos analizar el contenido temático de una disciplina científica, de programas curriculares o de los conocimientos que se tienen acerca de un tema y de los procesos que intervienen en la formación de estrategias operativas. Mientras que los mapas conceptuales permiten la organización jerárquica del conocimiento de un tema y pueden utilizarse antes, durante o después de enseñar un contenido (Novak & Gowin, 1988), los mapas cognitivos proporcionan una imagen mental personal tomada del ambiente y a la que puede recurrirse para analizar la evolución de un sistema cuando se

modifican los estímulos ambientales originales (Carlsson & Fullér, 1996). El mapa conceptual representa una jerarquía de diferentes niveles de generalidad e inclusividad conceptual y se compone de conceptos, proposiciones y palabras enlace. Los conceptos se refieren a objetos, eventos o situaciones y se representan en círculos llamados nodos. Existen tres tipos de conceptos: supraordinados (mayor nivel de inclusividad), coordinados (igual nivel de inclusividad) y subordinados (menor nivel de inclusividad). Las proposiciones representan la unión de dos o más conceptos relacionados entre sí mediante una palabra enlace. Las palabras enlace expresan el tipo de relación existente entre dos o más conceptos y se representan a través de líneas rotuladas (Carvalho y Tomé, 1999; Mellado *et al.*, 2002). La fuente para la elaboración de los mapas cognitivos puede provenir de un cuestionario (Novak y Gowin, 1988), el que normalmente puede asociarse a métodos cuantitativos y a procedimientos estadísticos de investigación. Por otro lado, la entrevista clínica es un procedimiento de recolección de datos habitualmente asociado a metodologías de análisis cualitativas. Hoy tanto uno como otro procedimiento se utilizan cuantitativa o cualitativamente según la naturaleza del problema investigado y en el caso particular de los mapas cognitivos, proporcionan un método de análisis de los datos que permite a cualquier observador externo replicar con facilidad el proceso de análisis secuencial a través de los datos disponibles. Estos aspectos, en definitiva, refuerzan la fiabilidad del proceso de investigación. En Mellado (2002), se analiza la utilización de los mapas conceptuales de Novak y colaboradores, ampliamente validados en numerosos trabajos de investigación, así como su evolución hacia el desarrollo de los mapas cognitivos (Novak & Gowin, 1988).

El mapa conceptual presenta una estructura lógica aceptada socialmente por los expertos del tema. En cambio el mapa cognitivo tiene una estructura con un sesgo hacia el campo de la psicología y pretende formar una representación idiosincrásica personal (Axelrod, 1976).

Los mapas cognitivos relacionan, de una forma parcialmente jerarquizada, unidades de información con un sentido más amplio que los conceptos utilizados en los mapas conceptuales. Aunque tanto la representación de



conceptos por medio de mapas cognitivos o a través de un mapa cognitivo difuso (MCD) permiten una visión global y no fragmentada de las concepciones que cada experto tiene del área de estudio, los primeros han sido utilizados mayormente en estrategias de planeamiento y los MCD están vinculados a la posibilidad que brindan para seguir la evolución de los conceptos que componen el mapa (Kardaras & Karakostas, 1999). Los mapas cognitivos desarrollados por expertos en una temática pueden ser construidos por ellos mismos o por otros especialistas encargados de analizar la problemática y de recoger los datos obtenidos a partir de entrevistas o cuestionarios.

Por otra parte, los MCD constituyen una herramienta desarrollada por Kosko que tiene por finalidad expandir el horizonte de trabajo que supone la implementación de los mapas cognitivos tradicionales (Carlsson, Mora & Terán, 2006; Kosko, 1997). Estos mapas pueden incluir la combinación de técnicas pertenecientes a la Soft Computing, tales como las Redes Neuronales Artificiales y la lógica difusa (Jang, 1997; Kosko, 1997).

## **II – Materiales y Métodos**

### *Mapas Cognitivos Difusos*

Para el análisis de los Mapas Cognitivos Difusos se considera una representación gráfica tal como la que surge durante el estudio de la teoría de grafos. De este modo un MCD consiste de un grafo dirigido con varios nodos que representan los conceptos que surgen del tema a tratar y de arcos dirigidos conectados a los nodos que representan las relaciones causales entre los mismos (Stach *et al.*, 2005). La Figura 1 ilustra las relaciones existentes entre los cinco conceptos  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_5$ , que han sido reunidos a partir de un problema determinado.

Al cambiar los valores en los nodos (conceptos) el sistema comienza una evolución según la cual el estado de cada nodo irá sufriendo modificaciones de acuerdo con la dinámica propia del sistema. Inicialmente cada concepto tiene un valor borroso perteneciente al intervalo  $[-1, 1]$  o bien a  $[0, 1]$ ; asimismo cada arco tiene asociado un peso cuyos valores se distribuyen en el intervalo  $[-1, 1]$ . El peso

será positivo si representa una relación causal incremental y negativo si la conexión implica una relación causal decreciente (Carvalho, 1999).

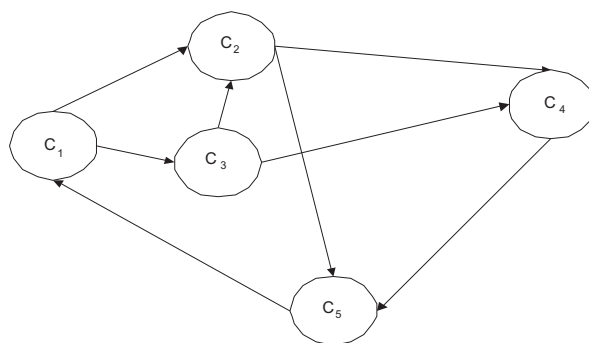


Figura 1: Relación causal entre los conceptos de un MCD

La Figura 2 representa la relación entre dos conceptos pertenecientes a un problema de planeamiento estratégico en el área de economía. En esa figura, se representa la inversión extranjera (concepto A) y la tasa de desempleo (concepto B); un peso  $w_{AB}$  de -0.9 en la relación causal entre estos dos conceptos está indicado a través de la flecha con origen en A y extremo en B y significa que la inversión extranjera tiene un gran impacto en la tasa de desempleo en el sentido de una disminución de esta última.

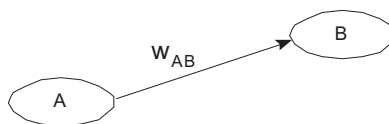


Figura 2: Relación causal entre dos conceptos A y B

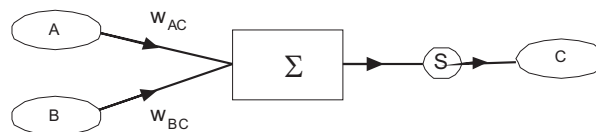
Como se desprende de la Figura 2, lo que se pretende con el estudio de un MCD es básicamente obtener la respuesta a un cuestionamiento de la forma "qué ocurre si". Por ello, dentro de un conjunto de conceptos reunidos se pretende analizar qué le sucede al sistema si algún estímulo cambia el valor de los conceptos, o bien si se introducen nuevos conceptos o se quitan algunos existentes. Este análisis en la dinámica del sistema, puede lograrse mediante un MCD que operando de manera iterativa, de modo similar al mecanismo de aprendizaje de una red neuronal y luego de cierto número de iteraciones, llegue a un nuevo estado de equilibrio que permita concluir qué consecuencias trajeron aparejados los

cambios realizados en los valores de los conceptos (Hilera & Martínez, 2000).

### *Técnicas para la construcción de Mapas Cognitivos Difusos*

Muchos fenómenos del mundo real pueden ser complicados si se los quiere representar por medio de un modelo matemático. En ocasiones, para poder comprender la distribución de los principales conceptos y las relaciones que los vinculan, resulta de utilidad incorporar mapas cognitivos (Carlsson, 1996). Cuando se requiera analizar la evolución de uno o varios conceptos intervinientes en el mapa al sufrir éste variaciones o cambios, resulta de interés estudiar el proceso dinámico que permita interpretar el estado al que evolucionó el sistema y las consecuencias que el estado inicial provocó. Los MCD presentan un sistema de cómputo similar al de las Redes Neuronales Artificiales. Si se está interesado en construir un modelo de un fenómeno complicado, en primer lugar deben elegirse las variables que intervienen en la descripción del modelo y establecer las relaciones entre ellas. Luego se debe elegir un método que permita simular el fenómeno, es decir que aporte herramientas para analizarlo y predecir el comportamiento ante nuevas situaciones.

La Figura 3 relaciona dos conceptos A y B con un tercero C. Éste es el modo de construir una red neuronal simple que permita obtener el valor del concepto C utilizando una función de transferencia sigmoideal  $S(x) = 1/(1 + e^{-x})$ .



**Figura 3:** Red neuronal para inferir el valor de C

En este caso, puede considerarse que existe una relación causal entre los nodos A-C y B-C, de manera que un incremento en el nodo A causa un incremento en el nodo C y a su vez, un incremento en el nodo B incrementa el valor del concepto C (si ambos pesos son positivos). Si se designan los pesos (intensidades) de estas conexiones con  $w_{AC}$  y  $w_{BC}$  respectivamente, el proceso para hallar el estado del nodo C

es similar al entrenamiento que se utiliza cuando se trabaja con Redes Neuronales Artificiales. En primer lugar se obtiene la suma ponderada de las entradas (valores de los conceptos que pueden estar en el rango  $[-1, 1]$ ), este valor se designa con  $net_j$  y está dado por la ecuación 1:

$$net_j = A.w_{AC} + B.w_{BC} \quad (1)$$

La función de transferencia utilizada puede ser una sigmoideal o una función escalón unitario. En el gráfico se hace referencia a una función sigmoideal designándola con la letra S. Esta función recibe como argumento el valor  $net_j$  y devuelve el nuevo valor de C, es decir que finalmente el valor del concepto resultante está dado por la ecuación 2:

$$C = f(net_j) \quad (2)$$

Después de un cierto número de iteraciones, se espera que el proceso se estabilice y converja a un estado fijo o bien a un ciclo de estados.

Para ilustrar un problema de formación estratégica (Hilera & Martínez, 2000) que puede ser tratado con un MCD, consideremos los conceptos intervinientes en el mapa cognitivo: Inversión Extranjera (IE), Leyes Regulatorias (LR), Empleo (E), Conflictividad Social (CS) y Estabilidad de Gobierno (EG). Las relaciones causales entre estos conceptos se ilustran en la Figura 4.

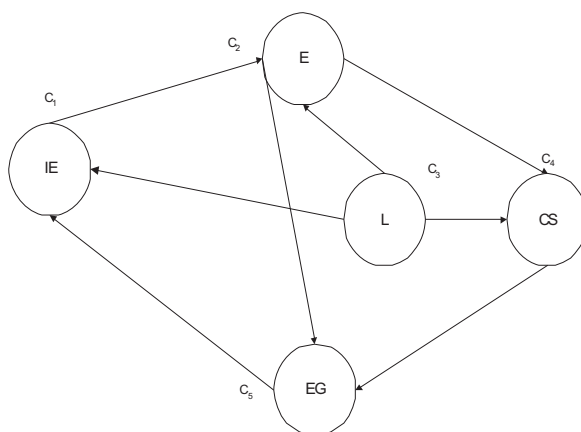


Figura 4: MCD para relacionar cinco conceptos

Para elaborar una estrategia que permita analizar la evolución de los conceptos con el transcurso del tiempo, se incluye la matriz de adyacencia  $w$  que contiene los valores de los pesos adoptados de acuerdo con las sugerencias de un experto en el tema.

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si el estado inicial es  $C_{(t=0)} = [0, 0, 0, 1, 0]$  luego de cinco iteraciones, trabajando con una función de transferencia sigmoïdal, se llega a una estabilidad en los valores que representan los conceptos del mapa, es decir cuando  $t = 5$  se tiene  $C_{(t=5)} = [1, 1, 1, 0, 0]$ . Por lo tanto, partiendo de una situación inicial  $C_{(t=0)}$  de plena conflictividad social se llega a un estado  $C_{(t=5)}$  donde ésta se ha podido eliminar con Inversión Extranjera (IE), aumentando el Empleo (E) y en un marco de Leyes Regulatorias (L), aunque como se aprecia, persista la falta de Estabilidad en el Gobierno (EG).

En caso de que se quiera incluir la opinión de varios expertos habrá que incluir tantas matrices de adyacencia como expertos se considere. En este caso, para determinar la matriz de pesos  $w_{ij}$ , que considere la opinión de todos los especialistas consultados sobre el tema, se recurre a la suma lógica borrosa. El valor final del peso  $w_{ij}$  que intervendrá en el estudio de la evolución de los conceptos surge de la ecuación (3):

$$w_{ij} = \bigcup_{k=1}^{k=M} w_{ij}^k = \max(w_{ij}^1, w_{ij}^2, \dots, w_{ij}^M) \quad (3)$$

donde se consideró la opinión de  $M$  expertos y por esa razón el supraíndice de los pesos  $w_{ij}$  recorre los valores de 1 a  $M$ . Ésta es una situación que es necesario tener en cuenta ya que sobre una misma temática dos personas que conozcan el problema, posiblemente tendrán ideas distintas sobre cómo un concepto ejerce una relación causal sobre otro.

Durante el cálculo de la suma lógica borrosa se consideró que cada peso que ocupa el lugar  $ij$  en la matriz de conectividad final, se obtendrá como el de mayor valor absoluto para esos subíndices; esta operación se realiza con los elementos correspondientes de las  $M$  matrices sugeridas por los expertos. Por ejemplo, si se tienen las matrices  $w_1$  y  $w_2$  siguientes:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz de adyacencia resultante será:

$$w = w_1 \cup w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se debe considerar el aprendizaje como el proceso por el cual se adaptan los parámetros (pesos sinápticos) de una red neuronal artificial (RNA) y por otro lado, al algoritmo de aprendizaje como un conjunto bien definido de reglas que permite actualizar los pesos sinápticos. El modelo de aprendizaje de la red neuronal tratada anteriormente, sólo se limitó a una asignación directa de valores a los pesos con los que se construyó la matriz de expertos. Sin embargo puede ocurrir que no se disponga de la opinión del experto para construir la matriz de adyacencia (Hilera & Martínez, 2000). En este caso puede ser útil incluir un algoritmo de aprendizaje similar al hebbiano. Este tipo de aprendizaje se basa en el postulado del neuropsicólogo Donald Hebb. El postulado de aprendizaje de Hebb es el más antiguo (Hebb, 1949); en su libro *La organización del comportamiento* postula: "Cuando una célula A está suficientemente cerca

de otra B como para tomar parte en excitarla, y lo hace persistentemente, suceden cambios metabólicos en una o ambas células de tal forma que se incrementa la eficiencia de A en excitar B”.

El aprendizaje hebbiano consiste en ajustar los pesos de las conexiones de acuerdo con el producto de dos valores correspondientes a la salida de las dos neuronas  $x_i$  e  $y_j$  que están interconectadas. De este modo el ajuste  $w_{ji}$  del peso sináptico está dado por la ecuación 4:

$$\Delta w_{ji}^{k+1} = \eta \Delta s_i^k \Delta s_j^k \quad , \quad (4)$$

donde  $k$  representa los valores  $x_i$  e  $y_j$  en la etapa  $k$  del ciclo de aprendizaje de la red. En ocasiones se suele incluir una tasa de aprendizaje  $\eta$  , que permite regular la velocidad con la que se modifican los pesos de la red, resultando la ecuación 5:

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta x_i(n) y_j(n) \quad (5)$$

Esta expresión está de acuerdo con el postulado de Hebb ya que:

1. Si dos neuronas vecinas se activan simultáneamente, el peso de su conexión se incrementa.
2. Si dos neuronas vecinas se activan asincrónicamente, la conexión se debilita o elimina.

Así, una regla de aprendizaje hebbiano es un mecanismo dependiente del tiempo, de ámbito local, que incrementa la eficiencia de una sinapsis en función de la correlación entre las actividades pre y postsinápticas (Hilera & Martínez, 2000).

La Figura 5 muestra la estructura de una red neuronal monocapa con conexiones autorrecurrentes y dotadas de un mecanismo de aprendizaje similar al de Hebb.

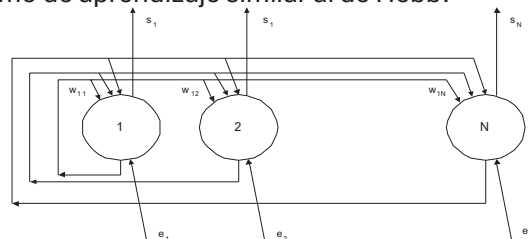


Figura 5: Red neuronal para tratar un BR-MCD

Cuando se conocen los valores provenientes de la observación de un determinado fenómeno sobre el que se quiere elaborar un MCD, puede emplearse la red anterior aunque con un mecanismo de aprendizaje similar al hebbiano descrito anteriormente. Cada vector  $E_i$  del set de entrenamiento de la red tiene N componentes y cada uno de ellos representa los conceptos del MCD, por lo tanto se puede formar un conjunto de entrenamiento dado por la expresión 6:

$$E = \{E^i\} = \{E^1, E^2, \dots, E^M\} = \{[e_1^1, e_2^1, \dots, e_N^1], [e_1^2, e_2^2, \dots, e_N^2], \dots, [e_1^M, e_2^M, \dots, e_N^M]\} \quad i=1 \dots M \quad (6)$$

Es posible emplear un aprendizaje hebbiano diferencial para ajustar los pesos de la red (Hilera & Martínez, 2000); por ello, ahora se utilizará la variación de los valores de las salidas de la red en lugar de utilizar las componentes de los vectores de entrenamiento directamente tal como sucedía en el algoritmo de Hebb. El mecanismo de ajuste de pesos está dado por la ecuación 7.

$$w_{ji}^{k+1} = w_{ji}^k + \eta \Delta s_i^k \Delta s_j^k \quad (7)$$

Como puede apreciarse, esta ecuación establece que el cambio en el peso que conecta la neurona j con la i, es el producto entre la variación de las salidas sucesivas de las dos neuronas. Por lo tanto, para calcular los incrementos en los pesos se utilizan las ecuaciones 8 y 9.

$$\Delta s_i^k = s_i^k - s_i^{k-1} \quad (8)$$

$$\Delta s_j^k = s_j^k - s_j^{k-1} \quad (9)$$

Estas ecuaciones están de acuerdo con las neuronas representadas en la Figura 5. Dado que cada neurona de la red está representando los conceptos  $C_i$  y  $C_j$  que se incluyen en el MCD, es conveniente escribir la expresión que proporciona el nuevo valor del peso en el paso k+1 de acuerdo con la ecuación 10. La misma hace referencia al nuevo peso que recibe la conexión entre las dos neuronas genéricas i-j que están interconectadas.

$$w_{ji}^{k+1} = w_{ji}^k + \eta \Delta C_i^k \Delta C_j^k \quad (10)$$

Éste es el método con que se actualizan todos los pesos de las conexiones entre las neuronas (conceptos) de la red y en definitiva permite calcular la nueva matriz de adyacencia w.



La Figura 6 muestra la técnica desarrollada para evaluar la dinámica de los conceptos en un MCD. Este sistema está constituido por la matriz de adyacencia  $W$  y por las neuronas (conceptos) borrosos. El mecanismo, similar al del entrenamiento realizado en redes neuronales, busca hallar un estado de equilibrio o un ciclo de estados de equilibrio para los valores de los conceptos del mapa, calculando en cada paso de tiempo el incremento de pesos  $\Delta w$ . Como se desprende del diagrama de flujo, los valores de la matriz de adyacencia se van renovando en cada iteración de acuerdo con la regla de corrección de pesos dada por la ecuación 10. Asimismo, los valores de los conceptos van sufriendo modificaciones en cada ciclo del entrenamiento de la red. El proceso consiste, en primer lugar, en hallar el producto escalar dado por la ecuación 11, cuyo resultado se escribe como  $net^k$ , haciendo referencia a que este valor va a ser el argumento de la función de transferencia  $f$  adoptada.

$$net^k = C^k w^k \quad (11)$$

El siguiente paso consiste en hallar el nuevo valor para el conjunto de los pesos. Este vector se calcula de acuerdo con la ecuación 12 y sus componentes representan los nuevos valores que toman los conceptos del MCD.

$$C_i^{k+1} = f(net^k) \quad (12)$$

El proceso iterativo finaliza al llegar a un estado de equilibrio donde, en principio, lo que se busca es que no haya cambios entre un valor del vector  $C$ , calculado en la etapa  $k + 1$ , y el calculado en la etapa  $k$ . Si esta situación no puede lograrse se busca que la estabilidad del mapa quede garantizada por un ciclo de estado de equilibrio.

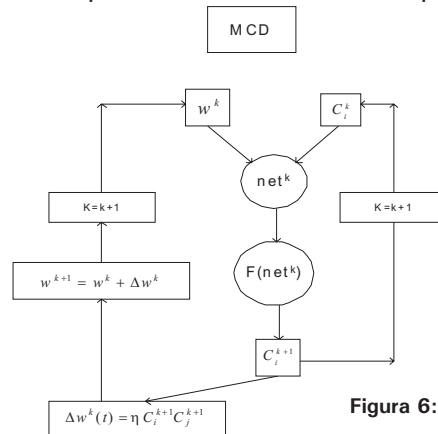


Figura 6: Diagrama de un MCD

### III - Resultados

Este último procedimiento fue implementado en Matlab y permitió inferir sobre el valor de los conceptos del mapa de la Figura 4. Durante las simulaciones numéricas realizadas, se experimentó con distinto número de reglas difusas BR y funciones de pertenencia mbf. Los detalles de estas simulaciones se sintetizan en la Tabla 1.

Función Transferencia	Ciclos de entrenamiento	Convergencia
Salto Unitario	Indefinido	No
Sigmoidal	5	Sí
Lineal	15	Sí

**Tabla 1:** Rendimiento de un Mapa Cognitivo Difuso para diferentes parámetros de entrenamiento.

La Tabla 1 corresponde a un MCD cuyo diagrama de flujo se encuentra en la Figura 6. Esta tabla representa los resultados obtenidos durante la simulación de la red cuyas neuronas (conceptos) corresponden al problema de estrategia económica y están representados en el MCD de la Figura 4. Se han considerado tres funciones de transferencia; con la función escalón unitario no se estabilizaron los valores de los conceptos y por lo tanto el sistema no presentó buenas características de convergencia. En cambio, al utilizar tanto una función de transferencia lineal como sigmoidal, el sistema requirió pocos ciclos para alcanzar el equilibrio.

### IV - Conclusiones

Los MCD muestran ser herramientas robustas y eficientes que ofrecen una forma rápida y de fácil empleo como para constituir un soporte destinado al análisis de los mapas cognitivos difusos tradicionales. Esta técnica permite seguir con comodidad la evolución que presentan los conceptos reunidos en un mapa, preservando el gran impacto visual que éstos presentan a la hora de resumir un tema o poner de manifiesto una estrategia operativa en un área de trabajo determinada.

Aunque el método puede presentar falencias, los MCD pertenecen a un área en constante expansión y con un

campo de aplicación cada vez mayor, donde actualmente se investigan alternativas de mejora, por ejemplo, los MCD con Base de Reglas (BR-MCD). Estos sistemas muestran ser un excelente complemento a los MCD tradicionales para estudiar la evolución de los conceptos en los casos en que el MCD no presente buenas características de convergencia.

## V - Bibliografía

CARLSSON, C. (1996). *Knowledge formation in strategic management*, HICSS-27 Proceedings, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, 1994 221-230.

HEBB, D. (1949). *The organization of behavior*. John Wiley & Sons. Nueva York.

NOVAK, J.D. y GOWIN, D.B. (1988). *Aprender a aprender*. Martínez Roca. Barcelona. España.

MELLADO, V., PEME-ARANEGA, C., REDONDO, C. y BERMEJO, M. L. (2002). *Los mapas cognitivos en el análisis gráfico de las concepciones del profesorado*. Campo Abierto, 22, 37-58.

CARVALHO, J. y TOMÉ, J. (1999). *Rule based fuzzy cognitive maps, fuzzy causal relations*, Instituto de Engenharia de Sistemas e Computadores Report.

KOSKO, B. (1997). *Fuzzy Engineering*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, Nueva Jersey.

KARDARAS, B. Y KARAKOSTAS, B. (1999). *The use of fuzzy cognitive maps to simulate the information systems strategic planning process*. Information and Software Technology, vol.41, pp.197-210.

AXELROD, R. (1976). *Structure of Decision: the Cognitive Maps of Political Elites*, Princeton University Press, Princeton, Nueva Jersey.

CARLSSON, C., RAMÍREZ, L., MORA, M., TERÁN, A. (2006). *Adaptive Fuzzy Cognitive Maps for Hyperknowledge Representation in Strategy Formation Process*.

STACH, W. *et al.* (2005). *Genetic learning of fuzzy cognitive maps*, Fuzzy Sets and Systems, Vol.153, N° 3, pp.371-401.

CARLSSON, C. y FULLÉR, R. (1996). *Adaptive Fuzzy Cognitive Maps for Hyperknowledge Representation in Strategy Formation Process*. <http://citeseer.ist.psu.edu>

HILERA, J. R. y MARTÍNEZ, V. (2000). *Redes Neuronales Artificiales: Fundamentos, modelos y aplicaciones*. RA-MA Editorial, Madrid. España.

JANG, R., SUN, C. y MITSUTANI, E. (1997). *Neuro-Fuzzy and Soft Computing, A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*. Prentice Hall. Nueva Jersey.

## INVITACIÓN

Se invita a los Señores Profesores y Docentes en general, a presentar sus trabajos para incluirlos en los próximos números de este Boletín.

Los mismos pueden presentarse a nombre de esta dirección en el aula 311 del Edificio Central de la Universidad.

Por cualquier consulta, comunicarse al teléfono 4659-2417.

Ing. Luinor E. Vilches

AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD DE MORÓN

Rector

Dr. Héctor Norberto Porto Lemma

Secretario General

Dr. José María Baños

Prosecretaría General

Arg. Marcela Kral

Secretario Académico

Dr. Eduardo Néstor Cozza

Secretario Administrativo

Dr. Jorge Marcos

Secretario de Ciencia y Tecnología

Dr. Domingo Liotta

Secretario Ejecutivo de Anexos y Subsedes

Dr. Carlos Humberto Pedrini

Director de la Oficina de Comunicaciones  
y Relaciones Institucionales

Lic. Alejandro Gavric

Director de la Oficina de Control de Gestión

Arg. Oscar Anibal Borrachia

Decano Facultad de Agronomía  
y Cs. Agroalimentarias

Ing. Agrónomo Antonio Ramón Angrisani

Decano Facultad de Arquitectura,  
Diseño, Arte y Urbanismo

Arg. Oscar Anibal Borrachia

Decano Facultad de Ciencias  
Económicas y Empresariales

Dr. Jorge Raúl Lemos

Decano Facultad de Ciencias Exactas,  
Químicas y Naturales

Dr. Aquiles Carlos Ferranti

Decano Facultad de Derecho,  
Ciencias Políticas y Sociales

Dr. Bruno Oscar Corbo

Decano Facultad de Ciencias Aplicadas  
al Turismo y la Población

Lic. Alejandro F. Gavric

Decano Facultad de Filosofía,  
Cs. de la Educación y Humanidades

Lic. Roberto Mario Paterno

Decano Facultad de Informática,  
Cs. de la Comunicación y Técnicas Especiales

Ing. Hugo René Padovani

Decano Facultad de Ingeniería

Ing. Oscar Nuñez

Decano Facultad de Medicina

Dr. Domingo Liotta

12

14