Energía del Campo Eléctrico.

Lino Spagnolo.

Un tema central del Electromagnetismo es el relativo a su energía. Existen diversos aspectos de la misma como ser la energía del campo eléctrico, con un caso especial muy importante que es la energía en un capacitor.

También tiene importantes aplicaciones la energía del campo magnético, cuyo caso más importante es la energía en solenoides, electroimanes y en bobinas de motores eléctricos.

Finalmente está la energía electromagnética, o del campo electromagnético, como la energía irradiada al espacio mediante antenas y la energía transmitida por medios materiales como las líneas de comunicación y las guías de onda.

Comenzaremos por estudiar el campo eléctrico y en diversas etapas nos aproximaremos a su contenido conceptual: primero analizaremos el capacitor, luego los conductores eléctricos y finalmente realizaremos un estudio más profundo de la estructura de las cargas eléctricas y la generación del campo respectivo. Analizaremos la carga de una esfera y el campo generado por la misma para luego poner de relieve aspectos más sustanciales de la teoría electromagnética.

1.− **Energía almacenada en un Capacitor.**

En un capacitor plano, la energía almacenada elemental está dada por $dW = V.dQ$. Integrando para todo el volumen del capacitor cuya carga total es Q se obtiene:

$$W_e = \int_v VdQ = \int_v \frac{Q}{C}dQ = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 \qquad (01)$$

Como la capacidad en el condensador plano vale: $C = \dfrac{\varepsilon S}{d}$ y el potencial en función del campo eléctrico generado: $V = E.d$ la energía total contenida es:

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_o S}{d}.E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 (Sd) \qquad (02)$$

Al ser (Sd) el volumen del capacitor, la densidad de energía en el interior del capacitor será:

$$\boxed{\varpi = \frac{W_e}{Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 \ (J)} \qquad (03)$$

Esta fórmula resulta válida en general para la densidad de energía almacenada en el campo eléctrico si bien fue deducida para un caso especial.

<u>Si en el capacitor hay un dieléctrico</u> la densidad de flujo eléctrico $\vec{D}$ viene dado por la fórmula:

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P} \tag{04}$$

siendo $\vec{P}$ el campo vectorial de polarización, que en los casos más comunes es una función lineal del campo eléctrico, y siendo χ_e la susceptibilidad del dieléctrico:

$$\vec{P} = \varepsilon_o \chi_e \vec{E} \;\; en \;\; (\frac{C}{m^2}) \tag{05}$$

Con lo cual la densidad de energía se desdobla en dos componentes:

$$\varpi = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{P} \tag{06}$$

Los dos sumandos de la energía son la densidad de energía en el vacío del capacitor más la concentrada en el dieléctrico debido a su polarización.

Esto muestra que el campo eléctrico almacena energía aún en el vacío, o en el aire seco, y la presencia del dieléctrico aumenta la energía almacenada en la cantidad $\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{P}$. Cuando se cumple la condición (05) resulta:

$$\varpi = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{P} = \boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_o (1+\chi_e) E^2} \tag{07}$$

2.− <u>Densidad de Potencia (o de Energía) en conductores eléctricos.</u>

La corriente que circula por un conductor se debe a que existe un campo eléctrico que ejerce una fuerza sobre las cargas (electrones), de valor:

$$d\vec{F} = \vec{E}\,dQ = \vec{E}\rho_v dv \tag{08}$$

Como la potencia es el producto de la fuerza por la velocidad:

$$dP = d\vec{F}\cdot\vec{u} = \rho_v \vec{E}\cdot\vec{u}\,dv \tag{09}$$

Integrando:

$$P = \vec{F}\cdot\vec{u} = \int_v \rho_v \vec{E}\cdot\vec{u}dv = \int_v \vec{E}\cdot\vec{J}\,dv \;\; \text{en (Watts): } \underline{\textbf{Ley de Joule}}. \tag{10}$$

Puesto que la densidad de corriente $\vec{J}$ se define también a través de la velocidad de desplazamiento de las cargas, o sea:

$\vec{J} = \rho_v \vec{u}$ Con ρ_v densidad de carga volumétrica.

De la ecuación $P = \int_v \vec{E}\cdot\vec{J}\,dv$, podemos escribir: $dv = dS.dl$

y la ecuación de la potencia se desdobla en:

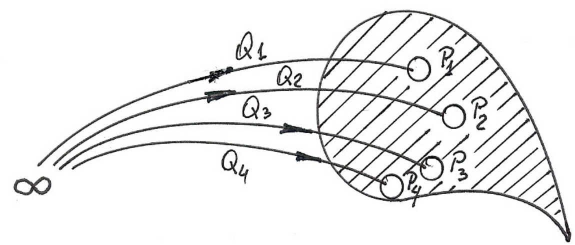
$$P = \int_v \vec{E}\cdot\vec{J}\,dv = \int_L \vec{E}\cdot d\vec{l}\,.\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \tag{11}$$

que recuerdan las definiciones de potencial y de corriente:

$$P = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} . \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = V.I = I^2 R \qquad (12)$$

Y que demuestran la Ley de Joule.

3.– **Energía en un campo eléctrico**



La energía electrostática es el trabajo necesario para traer desde el infinito un conjunto de cargas y situarlas en sus posiciones finales respectivas.

El potencial en P_i debido a una carga Q_k : $\boxed{V_i = k\dfrac{Q_k}{r_i}}$ con $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}$

Esta energía potencial equivale al trabajo que se efectúa para trasladar una carga positiva y unitaria desde infinito hasta el punto P_i, en contra del campo eléctrico existente generado por las anteriores cargas traídas desde infinito.

Si se tiene una carga Q en un campo eléctrico $\vec{E}$, el trabajo para trasladar la carga de P_1 a P_2 es:

$$W = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -Q\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q\int_1^2 \nabla V \cdot d\vec{l} = Q[V_2 - V_1] \qquad (13)$$

Dado que $\nabla V \cdot d\vec{l} = dV$, esta propiedad nos permite evaluar el trabajo más fácilmente por la diferencia de potencial que por la integral curvilínea.

El trabajo lo hacen las fuerzas exteriores en contra del campo eléctrico, por lo cual, al aportar este nuevo trabajo se incrementa la energía del campo en el valor:

$$W_e = Q(V_2 - V_1)$$

Si la carga se trae desde ∞ hasta el punto P_2, habida cuenta de que el potencial en el infinito es nulo puesto que se supone no haber cargas en el infinito, la energía que se aporta será:

$$W_e = Q(V_2 - V_1) = QV_2$$

Si el campo eléctrico está formado por un conjunto de cargas Q_i, la forma correcta de evaluar la energía que almacena el campo es calcular el trabajo de llevar cada carga desde ∞ hasta el punto final, según la clásica forma adoptada por muchos autores.

1.- Comenzaremos por traer la carga Q_1 cuyo trabajo será nulo pues no hay un campo preexistente. Q_1 se ubica en el origen de coordenadas.

2.- La segunda carga viene al punto P_2 en presencia de un campo $\vec{E}_1$ creado por Q_1 por el cual el trabajo efectuado será Q_2 por el potencial existente en P_2 (r_2):

El potencial en r_2 se calcula como: $E_2 = k\dfrac{Q_1}{r_2^2} = -\nabla V = -\dfrac{\partial V}{\partial r}$

En consecuencia: $V = -k\int_{\infty}^{r_2}\dfrac{Q_1}{r^2}dr = k\dfrac{Q_1}{r_2}$

El trabajo incorporado será: $W_2 = Q_2.(k\dfrac{Q_1}{r_2}) = Q_2.V_{21}$

Donde se ha designado por V_{21} el potencial en P_2 debido a Q_1.

3.- La tercer carga viene al punto P_3 en presencia de un campo $\vec{E}_2$ creado por Q_1 *y* Q_2 con el cual el trabajo efectuado será:

$$W_3 = Q_3 k\int_{\infty}^{3}\left[-\frac{Q_1}{r^2}-\frac{Q_2}{r^2}\right]dr = Q_3 k\left[\frac{Q_1}{r_3}+\frac{Q_2}{r_3}\right] = Q_3(V_{31}+V_{32})$$

4.- Con un razonamiento similar para la 4ª carga:

$$W_4 = Q_4 k\int_{\infty}^{4}\left[-\frac{Q_1}{r^2}-\frac{Q_2}{r^2}-\frac{Q_3}{r^2}\right]dr = Q_4 k\left[\frac{Q_1}{r_4}+\frac{Q_2}{r_4}+\frac{Q_3}{r_4}\right] =$$

$$W_4 = Q_4(V_{41}+V_{42}+V_{43})$$

Para simplificar el cálculo final se introduce un artificio que consiste en repetir el proceso de traer las cargas, pero en un orden inverso, es decir, se comienza por traer Q_4, luego Q_3, etc. La energía total aportada al campo será la semi suma de las energías:

$$W_e = \frac{1}{2}\begin{cases}(W_1+W_2+W_3+W_4)+ \\ (W_4+W_3+W_2+W_1)\end{cases} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{cases}0+Q_2V_{21}+Q_3(V_{31}+V_{32})+Q_4(V_{41}+V_{42}+V_{43})+ \\ 0+Q_3V_{34}+Q_2(V_{24}+V_{23})+Q_1(V_{14}+V_{13}+V_{12})\end{cases}$$

Sumando todo: $W_e = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}Q_1(V_{12}+V_{13}+V_{14})+Q_2(V_{21}+V_{23}+V_{24})+ \\ +Q_3(V_{31}+V_{32}+V_{34})+Q_4(V_{41}+V_{42}+V_{43})\end{bmatrix}$

Y como:

$$V_1 = (V_{12}+V_{13}+V_{14})$$
$$V_2 = (V_{21}+V_{23}+V_{24})$$
$$V_3 = (V_{31}+V_{32}+V_{34})$$
$$V_4 = (V_{41}+V_{42}+V_{43})$$

Podemos generalizar: $W_e = \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + ...\right) = \boxed{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_iV_i}$ (14)

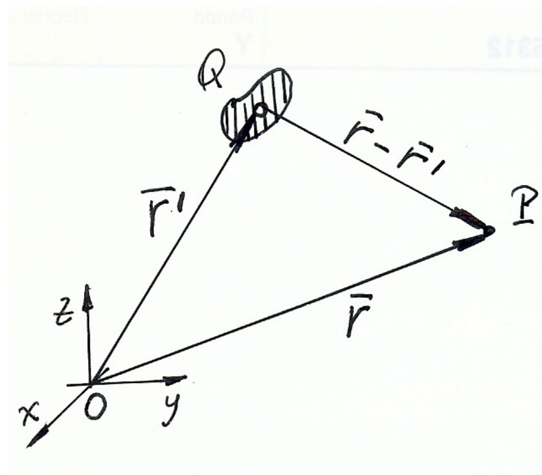
Y también: $V_i = k\left[\frac{Q_1}{r_i} + \frac{Q_2}{r_i} + \frac{Q_3}{r_i} + ...\right] = k \sum_{j=1;\, j\neq i}^{N} \left[\frac{Q_j}{r_j}\right]$

Agrupando ambos resultados: $\boxed{W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_iV_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i k \sum_{j=1;\, j\neq i}^{N} \left[\frac{Q_j}{r_j}\right]$ (15)

4.− Cálculo de la Energía debida a una distribución de cargas:

Considerando ahora una distribución de cargas continua en lugar de discretas, el potencial en un punto $P(\vec{r})$ debido a una carga situada en $\vec{r}\,'$ viene dado por:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{v'} \frac{\rho_{(r')}dv'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} \qquad (16)$$



Mientras que la carga Q es: $\boxed{Q = \int_v \rho dv}$ Reemplazando en la fórmula de la energía: $W_e = \frac{1}{2}\sum_{1}^{N} Q_iV_i$ O sea: $W_e = \frac{1}{2}\int_v \rho_{(r)}.V_{(r)}dv$ (17)

El flujo generado por la carga total Q , a través de S que rodea al volumen v se calcula con la fórmula de Gauss:

$$\Psi_Q = \oiint_S \varepsilon_o\vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q \qquad (18)$$

Teniendo en cuenta el teorema de la divergencia que iguala las integrales:

$$\Psi_Q = \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_v (\nabla\cdot\vec{D})dv = Q$$

Comparando este resultado con el anterior:

$$Q = \int_v (\nabla\cdot\vec{D})dv = \varepsilon_o\int_v (\nabla\cdot\vec{E})dv = \int_v \rho dv$$

Se concluye que:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \quad Y \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho} \tag{19}$$

Reemplazando en la fórmula de la energía: $W_e = \frac{1}{2}\int_v (\nabla \cdot \vec{D}) V_{(r)} dv$ (20)

Teniendo presente la identidad vectorial: $\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla \phi + (\nabla \cdot \vec{A})\phi$

Se nota la semejanza entre $(\nabla \cdot \vec{A})\phi$ y $(\nabla \cdot \vec{D})V_{(r)}$ en la que $V_{(r)}$ es una función escalar o potencial como ϕ, podemos reemplazar:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v \nabla \cdot (V\vec{D}) dv - \frac{1}{2}\int_v (\vec{D} \cdot \nabla V) dv$$

Aplicando nuevamente el teorema de la divergencia a la primera integral, se puede escribir:

$$W_e = \frac{1}{2}\oiint_S V(\vec{D} \cdot d\vec{S}) - \frac{1}{2}\int_v (\vec{D} \cdot \nabla V) dv \tag{21}$$

En la cual la integral de volumen se extiende a todo el espacio y por lo tanto la superficie S es la de una esfera cuyo radio que tiende a infinito, pero como el producto $V.\vec{D}$ es proporcional a $\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^2}$ mientras que la superficie S de la esfera sólo es proporcional a r^2, la integral de superficie tiende a cero al tender $r \rightarrow \infty$ y solamente tiene relevancia la segunda integral, por lo cual:

$$W_e = -\frac{1}{2}\int_v (\vec{D} \cdot \nabla V) dv = \frac{1}{2}\int_v (\vec{D} \cdot \vec{E}) dv \tag{22}$$

Dado que:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Obteniéndose las igualdades:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v (\vec{D} \cdot \vec{E}) dv = \frac{1}{2}\int_v (\varepsilon_o E^2) dv = \frac{1}{2}\int_v (\frac{D^2}{\varepsilon_o}) dv \ \ (J). \tag{23}$$

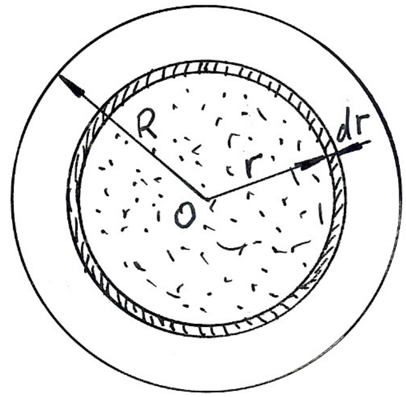
Este resultado es muy importante pues nos dice que la energía generada por una distribución continua de cargas se almacena en el campo eléctrico distribuido en todo el espacio.

Y esto hace que el campo eléctrico tenga una densidad de energía:

$$\boxed{\varpi_e = \frac{dW_e}{dv} = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon_o}} \ (\frac{J}{m^3}) \tag{24}$$

Ejemplo:

Imaginemos el proceso de carga de una esfera dieléctrica de radio R con cargas elementales que proceden desde infinito y que se distribuyen en la esfera en forma de capas sucesivas e infinitésimas de espesor dr, desde el centro hasta el radio R de la esfera.



El trabajo de traer un elemento de carga dq y depositarlo en la capa de radio r y espesor dr

equivale a: $dW = V(r)\,dq = k\dfrac{Q(r)}{r}dr = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q(r)}{r}dq$

en la cual $V(r)$ es el potencial de la esfera cuando está cargada hasta el radio r.

Si ρ es la densidad de carga uniformemente distribuida en el interior de la esfera de radio r (zona punteada), la carga allí acumulada (que es la carga neta) será:

$$Q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

mientras que la carga en la capa de espesor dr será: $dq = 4\pi r^2 \rho\, dr$

El trabajo total para cargar la esfera desde su centro O hasta el radio R se obtiene

aplicando: $$dW(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q(r)}{r}dq$$

$$W(r) = \frac{4\pi}{3\varepsilon_o}\rho^2\int_0^r r^4 dr = \frac{4\pi}{15\varepsilon_o}\rho^2 r^5$$

Pero dado que la carga total es: $Q(R) = \dfrac{4\pi}{3}R^3\rho$ reemplazando en la anterior:

$$\boxed{W(r) = \frac{3}{5}\cdot\frac{Q_{(R)}^2 r^5}{4\pi\varepsilon_o R^6} \quad Cuando \;\; r = R \;\rightarrow W(R) = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o R}} \qquad (25)$$

Según esto, se ha calculado la energía potencial (o energía) necesaria para cargar uniformemente una esfera, es decir, obtener una carga uniformemente distribuida.

Encarando el problema inverso, ¿cuál es la energía del campo eléctrico creado por una carga distribuida?
Para calcular la energía usaremos la fórmula:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v (\varepsilon_o E^2)dv \qquad (26)$$

Para ello se calculará el campo eléctrico en el interior de la esfera, con radio $r < R$ y en el exterior de la esfera con un radio $r \geq R$.
Para ello se usará la fórmula de Gauss en dos etapas: primero con una superficie gaussiana que encierra una parte de la esfera y luego otra superficie gaussiana que encierre toda la esfera:

La fórmula de Gauss establece: $$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_v \rho dv \qquad (27)$$

Considerando la primera parte del problema con un radio $r < R$, se tiene:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_o}\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \therefore \quad E(r) = \frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_o R^3}$$

En la segunda parte, $r \geq R$, el campo eléctrico es equivalente al de una carga puntual ubicada en el origen O. $$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Luego integrando $W_e = \frac{1}{2}\int_v (\varepsilon_o E^2)dv$ en los dos sectores, interior y exterior de la esfera, y con $dv = 4\pi r^2 dr$, se tendrá:

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{R^6}\int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}\right] \qquad (28)$$

Integrando: $$\boxed{W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o R}\left(\frac{1}{5}+1\right) = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o R}} \qquad (29)$$

En total coincidencia con el resultado anterior.

<u>Observación:</u>

En la deducción de la energía almacenada en el campo eléctrico se han utilizado dos metodologías para su obtención y han demostrado que ambas conducen al mismo resultado.

O sea que las fórmulas $W_e = \frac{1}{2}\sum_1^N Q_i V_i$ y $W_e = \frac{1}{2}\int_v (\varepsilon_o E^2)dv$ (30)

Una para cargas discretas y la otra para una distribución continua, deben conducir a un único resultado; sin embargo en el medio se produjo una alteración: mientras que en la primera fórmula se especificó que la carga Q_i no interaccionaba con el campo propio creado, por ello el trabajo de la carga Q_4

$$W_4 = Q_4 k \int_{\infty}^{4} \left[-\frac{Q_1}{r^2} - \frac{Q_2}{r^2} - \frac{Q_3}{r^2} \right] dr = Q_4 k \left[\frac{Q_1}{r_4} + \frac{Q_2}{r_4} + \frac{Q_3}{r_4} \right] \qquad (31)$$

no incluía el campo propio.

En la segunda fórmula no se especifica nada, con lo cual existe una interacción tácita entre las cargas Q_i y su propio campo. De alguna forma los físicos han solucionado esto imponiendo la condición que el campo no actúa sobre la propia carga que lo genera. Y esta hipótesis, no contenida en ningún principio del electromagnetismo, está incluida en la fórmula (31) que explícitamente excluye el campo de Q_4 cuando se lo traslada.

El tema planteado sería: cada carga puntual necesita una cierta energía, que llamaremos self-energía, para instalarse a sí misma? La teoría clásica dice que no. Sin embargo las modernas teorías, como el electromagnetismo cuántico, lo plantean como una cuestión aún sin resolver.