MECÁNICA RACIONAL
ING. LINO SPAGNOLO

Capítulo 1
Introducción a vectores y tensores

La Física es una ciencia que requiere de mediciones muy precisas de las múltiples magnitudes observables en la naturaleza, para luego relacionarlas entre sí a través de teorías físico-matemáticas.

Experimentalmente se comprueba que las características de tales magnitudes son muy diversas. Algunas, tales como el tiempo, la superficie, la temperatura, la frecuencia, la carga eléctrica, etc. requieren un solo número para su definición; tales magnitudes se llaman en consecuencia **magnitudes escalares**.

Existen otras magnitudes físicas que requieren más de una cifra para tener una completa especificación. Tales magnitudes son la velocidad, la aceleración, la fuerza, el desplazamiento, el momento de una fuerza, etc. Ellas requieren un número que especifique su intensidad o módulo, otro número que especifique su dirección y su sentido. Tales magnitudes se denominan **magnitudes vectoriales**.

Hay magnitudes aún más complejas, que necesitan de mayor información para representar fehacientemente el fenómeno físico. Las más importantes son las **magnitudes tensoriales,** siendo, probablemente la más conocida el tensor de inercia de la mecánica clásica, el tensor de tensiones y el de deformaciones.

Las magnitudes vectoriales se representan gráficamente a través de un segmento orientado, como el de la (Fig. 1-1), $\overline{OP}$ que llamaremos vector $\vec{A}$, con una intensidad o módulo proporcional a la longitud del segmento $\overline{OP}$ y una dirección y sentido proporcionada por los tres ángulos que forma el vector $\vec{A}$ con los tres ejes coordenados.

Ángulo α entre el vector y el eje x.
Ángulo δ entre el vector y el eje y.
Ángulo γ entre el vector y el eje z.

Los cosenos de estos tres ángulos son los llamados cosenos directores del vector $\vec{A}$.

La distancia $\overline{OP}$, o módulo del vector, se designa con los símbolos: $|\vec{A}|$ o más simplemente con la letra A.

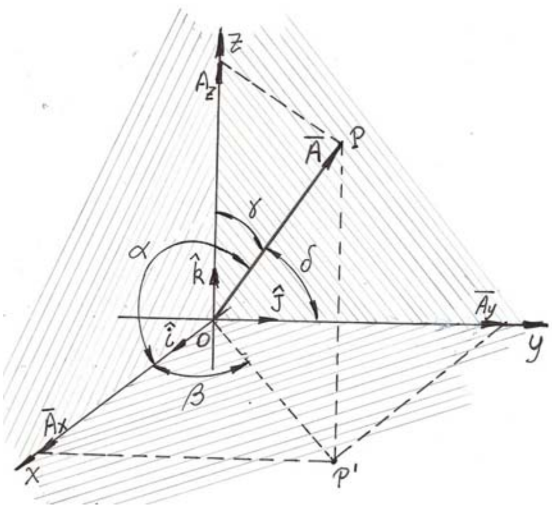


Fig. 1-1

La representación gráfica de los vectores permite una rápida definición de sus propiedades.

1.-) Multiplicar un vector por una constante o escalar κ equivale a obtener otro vector paralelo al anterior de módulo κA

2.-) Esto permite definir un **vector de módulo unitario** $\hat{e}$ en una dirección determinada y luego redefinir el vector como $\vec{A} = A\hat{e}$ en la misma dirección y sentido que $\hat{e}$.

3.-) Igualdad de vectores. Se define como iguales a dos vectores si tienen el mismo módulo y la misma dirección y sentido. Los tipos de vectores que cumplen esta condición se llaman vectores libres y cumplen además con las siguientes propiedades:

- Reflexiva: $\vec{A} = \vec{A}$
- Simétrica: Si $\vec{A} = \vec{B}$ entonces es $\vec{B} = \vec{A}$.
- Transitiva: Si $\vec{A} = \vec{B}$ y $\vec{B} = \vec{C}$ entonces será $\vec{A} = \vec{C}$.

4.-) Existe una subclase de vectores que tienen una mayor restricción para la definición de igualdad. Son los vectores deslizantes y los vectores fijos o polares.

- **Vectores deslizantes** o Vectores fuerza. Su igualdad se define agregándoles a las tres condiciones anteriores (módulo, dirección y sentido) la condición de estar sobre la misma recta de acción.
  Típico caso de esta categoría de vectores son las fuerzas, ya sean mecánicas o electromagnéticas.

- **Vectores fijos**. Estos vectores parten de un origen común por lo cual son iguales si cumplen las tres condiciones de los vectores libres y además se aplican sobre el mismo punto origen.

Suma y resta de Vectores

La definición de suma entre vectores está representada en la figura mediante un caso plano.

Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se suman y en el gráfico puede verse que cumplen con:

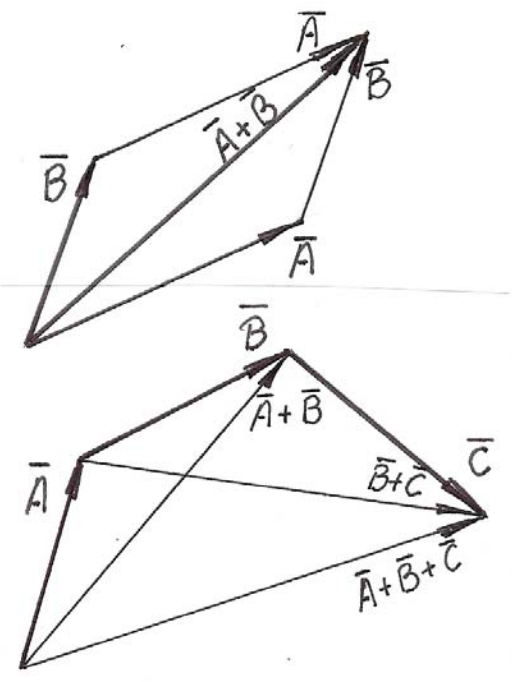
$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$, propiedad conmutativa de la suma.

La suma de dos vectores es conocida también como regla del paralelogramo.

También puede verse que cumplen la propiedad asociativa de la suma:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} =$$

$$= \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

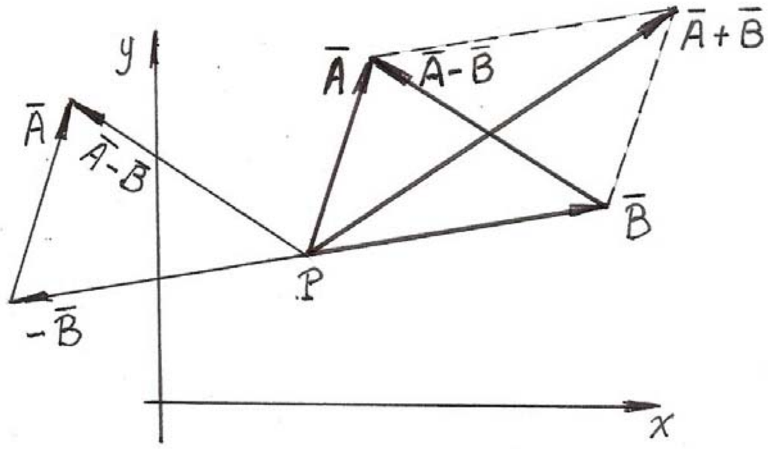


También permite verificar que si $\vec{A}+\vec{B}=\vec{0}$, entonces $\vec{A}=-\vec{B}$, donde se define $\vec{B}$ como un vector de igual módulo que $\vec{A}$, igual dirección y sentido contrario.

Con esta definición de **vectores negativos** podemos definir la resta de dos vectores como:

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

En la figura se puede ver como la suma de dos vectores es una diagonal del paralelogramo y la resta es la otra diagonal.



Representación cartesiana de vectores

Una vez definido el vector unitario (Fig. 1-1), pueden representarse en un triedro cartesiano $x-y-z$ los vectores unitarios $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3$ en las direcciones y sentidos de los tres ejes.

Para facilitar la escritura se ha adoptado, casi universalmente, identificar esos tres versores unitarios y ortogonales entre sí, mediante las letras i, j, k. Esto permite definir un vector como suma de sus componentes en el triedro cartesiano.

$\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y+\vec{A}_z$ siendo cada componente la proyección del vector $\vec{A}$ sobre cada uno de los ejes mediante los cosenos directores respectivos.

$$\vec{A}_x = A_x\hat{i} = A\cos\alpha\hat{i} = A\sin\gamma\cos\beta\hat{i}$$
$$\vec{A}_y = A_y\hat{j} = A\cos\delta\hat{j} = A\sin\gamma\sin\beta\hat{j}$$
$$\vec{A}_z = A_z\hat{k} = A\cos\gamma\hat{k} = A\cos\gamma\hat{k}$$

También se definirá su módulo y sus cosenos directores:

$$\left|\vec{A}\right| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\alpha : \acute{a}ngulo\ entre\ \vec{A}\ y\ \hat{i} \rightarrow \cos\alpha = \frac{A_x}{A}$$

$$\delta : \acute{a}ngulo\ entre\ \vec{A}\ y\ \hat{j} \rightarrow \cos\delta = \frac{A_y}{A}$$

$$\gamma : \acute{a}ngulo\ entre\ \vec{A}\ y\ \hat{k} \rightarrow \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

Ejercicio 1.-

Dados los vectores: $\vec{A}(5,2,-1)$; $\vec{B}(4,8,7)$; $\vec{C}(7,-3,2)$ efectuar las siguientes operaciones.

1.-) Hallar $\vec{A}+\vec{B}$ y $\vec{B}-\vec{A}$.

$$\vec{A}+\vec{B}=9\hat{i}+10\hat{j}+6\hat{k}$$

$$\vec{B}-\vec{A}=-\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k}$$

2.-) Si $\vec{C}+\vec{X}=\vec{D}$ y el vector suma $\vec{D}$ tiene un módulo $D=15$ y está contenido en el plano $x-y$ formando un ángulo $\beta=30^{o}$. Se pide calcular el valor del vector $\vec{X}$ ya que $\vec{C}$ es dato.

$$\vec{C}(C_x,C_y,C_z)+\vec{X}(X_x,X_y,X_z)=\vec{D}(X_x+7;\ X_y-3;\ X_z+2)$$

La primera condición es que el vector $\vec{D}$ esté en el plano $x-y$ $\therefore X_z=-2$

La segunda condición es que: $\sqrt{(X_x+7)^2+(X_y-3)^2}=15$

Y además: $\dfrac{X_x+7}{15}=\cos 30^{o}=0{,}866$

Ambas condiciones definen que el vector $\vec{D}$ debe ser: $\vec{D}=13\hat{i}+7{,}48\hat{j}$

Y verificamos que el ángulo que forma con el eje X es:

$$\beta=\cos^{-1}\frac{D_x}{D}=\cos^{-1}(\frac{13}{15})=30^{o}$$

Producto de Vectores

El álgebra vectorial para la suma y resta de magnitudes vectoriales no es muy diferente del álgebra de las magnitudes escalares, si bien trae conceptos nuevos como el de módulo de un vector, cosenos directores que definen su orientación en un sistema de coordenadas ortogonales y la forma especial de sumar las componentes según una misma dirección.

En el álgebra vectorial del producto de vectores se producen nuevas variantes que hacen que los productos obtenidos tengan aplicaciones prácticas e importantes en la Física.

Hay dos nuevos productos entre vectores que se denominan Producto Escalar y Producto Vectorial y un tercero, cuya importancia veremos más adelante, denominado Producto Tensorial, entre dos vectores. Los tres son de una gran importancia en toda la Física.

Producto Escalar. El producto escalar entre dos vectores se define como

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=A.B.\cos\beta} \qquad (1\text{-}2)$$

Y puede demostrarse que equivale al siguiente producto entre sus componentes, en el espacio de tres dimensiones.

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z} \qquad (1\text{-}3)$$

En efecto, si dados los vectores $\vec{A}\, y\ \vec{B}$, analizamos, primero por simplicidad, en el caso del plano $x - y$, ver Fig. (1 – 2)

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

Y si β es el ángulo que forman los dos vectores entre sí.

$\vec{A}\ y\ \vec{B}$ tienen por componentes:

$$A_x = A\cos\beta_1 \qquad B_x = B\cos\beta_2$$

$$A_y = A\sin\beta_1 \qquad B_y = B\sin\beta_2$$

Dado, por otra parte que el ángulo β formado entre los dos vectores equivale a: $\boxed{\beta = \beta_2 - \beta_1}$

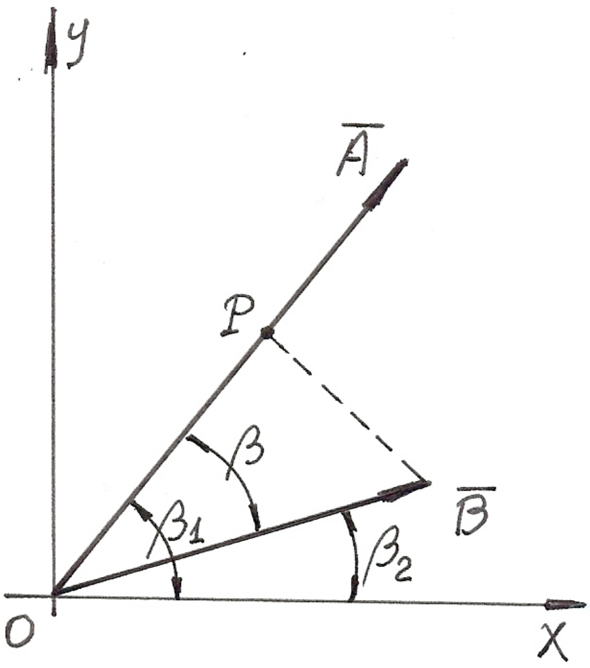


Fig. (1–2)

Y como:

$$\cos\beta = \cos(\beta_2 - \beta_1) = (\cos\beta_1\cos\beta_2 + \sin\beta_1\sin\beta_2)$$

Podemos poner:

$$A.B\cos\beta = A.B(\cos\beta_1\cos\beta_2 + \sin\beta_1\sin\beta_2)$$

Que es equivalente a:

$$A\cos\beta_1 B\cos\beta_2 + A\sin\beta_1 B\sin\beta_2 = A_x B_x + A_y B_y$$

Por lo tanto se ha demostrado que $\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A.B.\cos\beta = A_x B_x + A_y B_y}$

para el caso del plano $x - y$ puede demostrarse en general que:

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A.B.\cos\beta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z} \qquad (1\text{-}4)$$

Luego, el producto escalar de dos vectores es un escalar que resulta de multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo entre los dos vectores.

Una vez conocidas estas propiedades se puede comprobar que los productos escalares de los versores cumplen con:

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=i^2=1 \qquad \hat{i}\cdot\hat{j}=0$$
$$\hat{j}\cdot\hat{j}=j^2=1 \qquad \hat{i}\cdot\hat{k}=0 \qquad (1\text{-}5)$$
$$\hat{k}\cdot\hat{k}=k^2=1 \qquad \hat{j}\cdot\hat{k}=0$$

Estas propiedades permiten escribir el producto escalar entre dos vectores de una nueva forma, que nos será útil para definir luego un nuevo producto.

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}) \qquad (1\text{-}6)$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_xi^2+A_yB_yj^2+A_zB_zk^2+A_xB_y\hat{i}\cdot\hat{j}+A_xB_z\hat{i}\cdot\hat{k}+A_yB_z\hat{j}\cdot\hat{k}$$

La cual cumple con (1-4).

El producto escalar entre dos vectores goza de diversas e importantes **propiedades:**

a) El producto escalar es conmutativo $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$ por la simple inspección de la fórmula (1-2).

b) Si el producto escalar entre dos vectores no nulos, es nulo, ésta es una condición necesaria y suficiente para que los dos vectores sean normales entre sí.

c) El producto escalar también tiene la propiedad distributiva

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

d) El producto escalar tiene la propiedad asociativa: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$

En los ejercicios siguientes se verán otras de sus características.

Ejercicio 2.-

Dado el vector $\vec{B}(7;-3;2)$ qué valor debe tener otro vector $\vec{A}$ para que su vector suma esté definido en el plano $x-y$ con un módulo y un ángulo θ formado con el eje x dado.

Es decir $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}\rightarrow tal\ \ que\ \ R=15\ \ y\ \ \theta=30^{\circ}$.

Solución.

Deberá cumplirse que:

$$\vec{A}(A_x;A_y;A_z)+\vec{B}(7;-3;2)=\vec{R}(A_x+7;A_y-3;A_z+2)$$

La primera condición especifica que $\vec{R}$ esté en el plano $x-y$ por lo tanto:

$$A_z+2=0\ \therefore\ A_z=-2$$

La segunda condición especifica que:

$$\sqrt{(A_x+7)^2+(A_y-3)^2}=15$$

Y además:

$$\cos\theta = \frac{A_x + 7}{15} = 0,866$$

De lo cual deducimos: $A_x = 6$; $A_y = \sqrt{15^2 - 13^2} + 3 = 10,48$

Finalmente:

$$\vec{R} = \vec{R}(13;7,48) = 13\hat{i} + 7,48\vec{j}$$

Ejercicio 3.-

Demostrar que de la regla del paralelogramo o de la suma de dos vectores se puede inferir el teorema del coseno.

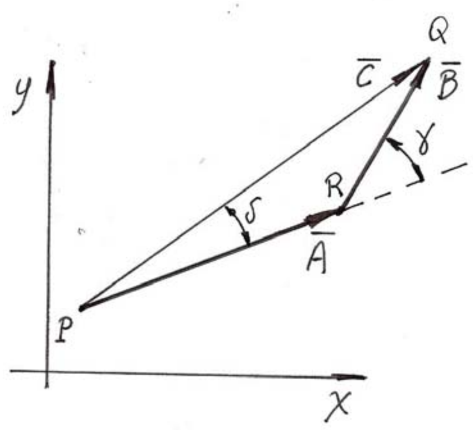


Fig. (1-3)

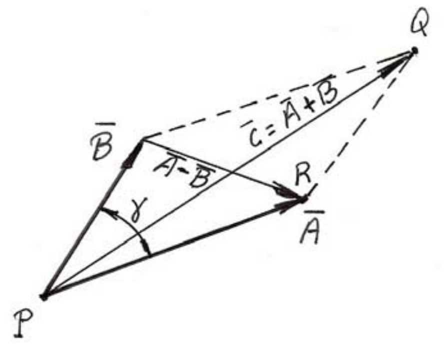


Fig. (1-4)

El vector suma de $\vec{A}\,;\vec{B}$ es:

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

Y su módulo cuadrático, desarrollando los cuadrados de las sumas:

$$\left|\vec{C}\right|^2 = C^2 = C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = A^2 + B^2 + 2(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)$$

Y esto equivale a poner:

$$(\vec{A} + \vec{B})^2 = C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\gamma$$

Que es precisamente el teorema del coseno.

La Fig. 1-4 ilustra con un rombo, cómo la diferencia entre dos vectores da otra forma del teorema del coseno.

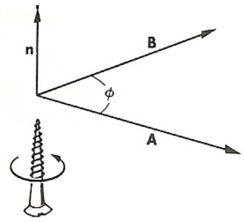
$$(\vec{A} - \vec{B})^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$$

Producto Vectorial

Éste es el otro importante producto entre dos vectores.
Se define como:

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = A.B.\sin\beta \tag{1-7}$$

La definición anterior no es completa ya que sólo informa cómo será el módulo del producto vectorial. A ello debe agregarse que tendrá una magnitud vectorial con la dirección de la normal al plano formado por los dos vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ (Fig. 1-5), indicada con el versor $\hat{n}^{o}$, y con un sentido tal que girando el vector $\vec{A}$ hacia el vector $\vec{B}$ se avance en el sentido del tirabuzón. $\vec{A}\times\vec{B} = A.B.\sin\beta.\hat{n}^{o}$



Está claro que si el producto vectorial fuese

$$\vec{B}\times\vec{A} = A.B.\sin\beta.(-\hat{n}^{o}) = -A.B.\sin\beta.\hat{n}^{o} \qquad \text{(1-7)'}$$

al girar el tirabuzón en el sentido de $\vec{B}$ hacía $\vec{A}$ la dirección es la misma pero el sentido se invierte.

El producto vectorial de dos vectores se indicará por lo tanto como:

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = A.B.\sin\beta\,\hat{n}^{o}} \qquad \text{(1-8)}$$

Si los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ están definidos en el plano $x-y$, el producto anterior toma la forma:

$$\vec{A}\times\vec{B} = A.B.\sin\beta\,\hat{k}$$

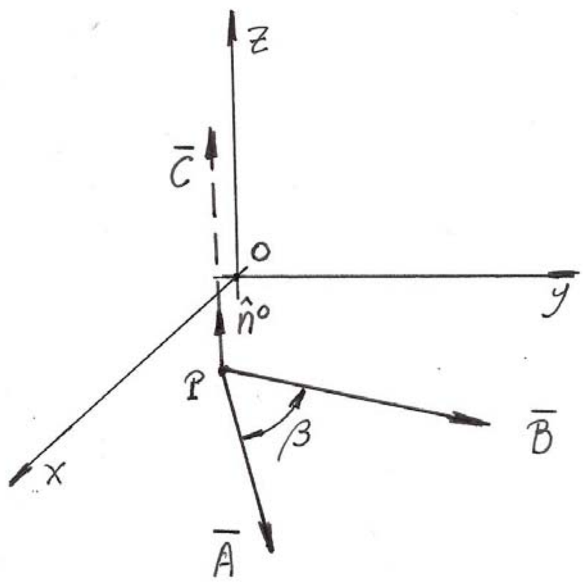


Fig. 1-5

Continuando con el caso en que los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$, definidos en el plano $x-y$, la fórmula $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = A.B.\sin\beta$ puede escribirse de otra forma, como productos de sus componentes, tal como se hizo con el producto escalar.

Recurriendo a la Fig. (1–2) el ángulo $\beta = \beta_2 - \beta_1$ y por lo tanto

$$\sin\beta = \sin(\beta_2 - \beta_1) = \cos\beta_1 \sin\beta_2 - \sin\beta_1 \cos\beta_2 \qquad \text{(1-9)}$$

Reemplazando:

$$A.B.\sin\beta = A\cos\beta_1.B\sin\beta_2 - A\sin\beta_1.B\cos\beta_2$$

Lo cual equivale a:

$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = A.B.\sin\beta.\hat{k} = (A_x B_y - A_y B_x).\hat{k}} \qquad \text{(1-10)}$$

Repitiendo lo mismo en los tres planos se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = A.B.\sin\beta.\hat{n}^o = \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} \end{aligned}} \qquad \text{(1-11)}$$

Con los conocimientos de las propiedades de los productos vectoriales, se puede inferir que los productos vectoriales de los versores cumplen con:

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{i} &= 0 & \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{j} &= 0 & \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{k} &= 0 & \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j} \end{aligned}$$

Con las cuales podemos expresar nuevamente el producto vectorial entre dos vectores, de forma general (siempre usando las coordenadas cartesianas).

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \qquad \text{(1-12)}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} = {} & A_x B_x \hat{i} \times \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} + \\ & + A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \times \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} + \\ & + A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \times \hat{k} \end{aligned}$$

Reemplazando con la tabla
de los versores, se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} = {} & (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + \\ & + (A_z B_x - A_x B)\hat{j} + \\ & + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} \end{aligned} \qquad \text{(1-13)}$$

El producto anterior tiene una representación muy usual en coordenadas cartesianas como desarrollo de un determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad \text{(1-13)'}$$

Expresión fácil de recordar.

Ejercicio 4.-

Hallar el producto vectorial de los vectores $\vec{A}(4;6;1)\ y\ \vec{B}(5;-3;7)$ y el ángulo que forma el vector $\vec{R}$ del resultado con el vector $\vec{A}$.

Solución:

$$\vec{R} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 6 & 1 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 45\hat{i} - 23\hat{j} - 42\hat{k}$$

Para hallar el ángulo, se usa la fórmula:

$$\left|\vec{R} \times \vec{A}\right| = R.A.\sin\beta \ \therefore\ \sin\beta = \frac{\left|\vec{R} \times \vec{A}\right|}{R.A}$$

$$\vec{R} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 45 & -23 & -42 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 229\hat{i} - 213\hat{j} - 362\hat{k}$$

$$\left|\vec{R} \times \vec{A}\right| = \sqrt{229^2 + 213^2 + 362^2} = 478 \qquad R = \sqrt{45^2 + 23^2 + 42^2} = 65,7$$

$$A = \sqrt{4^2 + 6^2 + 1^2} = 7,28$$

Por lo tanto $\sin\beta = \dfrac{\left|\vec{R} \times \vec{A}\right|}{R.A} = \dfrac{478}{478} = 1 \rightarrow \therefore\ \beta = 90^{\circ}$

Confirmando los resultados de que el producto vectorial de dos vectores da por resultado otro vector normal al plano formado por dichos vectores.

Propiedades del producto vectorial

a) El producto vectorial no es conmutativo $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ por las razones dadas en fórmula (1-7)', precisamente es anticonmutativo.

b) Si el producto vectorial entre dos vectores no nulos, es nulo, ésta es una condición necesaria y suficiente para que los dos vectores sean paralelos entre sí.

c) El producto vectorial también tiene la propiedad distributiva

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \qquad (1\text{-}14)$$

d) El producto vectorial no tiene la propiedad asociativa ya que en general:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} \qquad (1\text{-}15)$$

como puede verse con el desarrollo del triple producto vectorial. (Ver Tabla de Resumen de Fórmulas al final del capítulo).

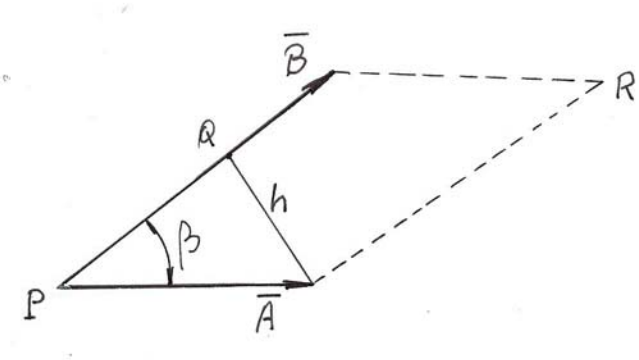
e) El vector obtenido del producto vectorial $\vec{M} = \vec{A} \times \vec{B}$ se denomina más exactamente seudo vector o vector axial, por depender de la orientación del triedro, es decir, si utilizamos la terna derecha $x-y-z$ el resultado $\vec{M}$ tiene una dirección y el sentido dado por la regla del tirabuzón; mientras que si empleamos la terna izquierda o invertida $y-x-z$, el resultado $\vec{M}$ tiene la misma dirección pero sentido contrario a la anterior. Entre los casos más conocidos de vectores axiles (o axiales) se encuentra el momento de una fuerza, la velocidad angular de un cuerpo sólido y el campo de inducción magnética.

Una interesante propiedad del módulo del producto vectorial es su representación geométrica.

El módulo del producto vectorial

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = A.B.\sin\beta$$

es precisamente el área del rombo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

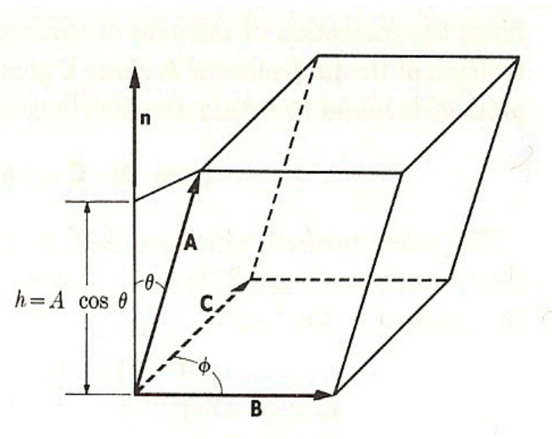


En efecto, como la altura es el producto $h = A\sin\beta$, el producto $h.B$ es la superficie del paralelepípedo.

Otra propiedad geométrica la tiene el producto mixto formado por los vectores:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = ABC\sin\varphi\cos\theta$$

Dado que el producto $\vec{B}\times\vec{C}$ da el vector normal al plano $BC\hat{n}^o$, su producto escalar por el vector $\vec{A}$ da el volumen del paralelepípedo formado por $\vec{A}\vec{B}\vec{C}$.



Puede demostrarse que el producto mixto de tres vectores es el valor del determinante:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = ABC\sin\varphi\cos\theta = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (1\text{-}16)$$

Se trata de un escalar con las propiedades:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = (\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B} = -\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{B})$$

Ejercicio 5.-

Comprobar el siguiente resultado entre los productos escalares y vectoriales.

$$(\vec{A}\cdot\vec{B})^2 + (\vec{A}\times\vec{B})^2 = A^2B^2 \qquad (1\text{-}17)$$

Ejercicio 6.-

Probar que otro producto entre tres vectores, el denominado triple producto vectorial, puede hallarse por la diferencia entre dos productos escalares multiplicados respectivamente por $\vec{B}\ y\ por\ \vec{C}$.

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \qquad (1\text{-}18)$$

Ejercicio 7.-

Dados los vectores $\vec{A};\vec{B};\vec{C}$ hallar los siguientes productos:

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{k} \qquad \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$$

$$\vec{B} = 4\hat{j} + 5\hat{k} \qquad (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

$$\vec{C} = 2\hat{i} + 2\hat{k} \qquad \vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{C})$$

Resultados.

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = 20\hat{i} + 8\hat{j} + 30\hat{k}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = -30\hat{i} + 8\hat{j} + 30\hat{k}$$

$$\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{C}) = -20\hat{i} - 30\hat{k}$$

Regla de productos entre vectores y seudo-vectores.

Se ilustran en las dos tablas las reglas que obedecen.

Las abreviaturas son: $\begin{cases} E & : escalar \\ SE & : seudo\, escalar \end{cases} \quad \begin{cases} V & : vector \\ SV & : seudo\, vector \end{cases}$

Prod. Escalar	V	SV
Vector = V	E	SE
SeudoVec.=SV	SE	E

Prod. Vectorial	V	SV
Vector = V	SV	V
SeudoVect.=SV	V	SV

Por definición, se llama seudo escalar al producto escalar entre un seudo vector y un vector. Se caracteriza por cambiar de signo ante una transformación impropia.

<u>Producto Tensorial</u>

Hasta ahora los productos entre las componentes de los dos vectores siempre tuvieron algunas restricciones importantes, ver las fórmulas (1-6)' y (1-12).

Existe un tercer producto entre las componentes de dos vectores que se llama tanto cartesiano como tensorial. Dados dos vectores:

$$\vec{A}(A_x;A_y;A_z)\ ;\ \vec{B}(B_x;B_y;B_z)$$

se forman nueve productos entre sus componentes, de 9 maneras posibles para vectores de tres dimensiones:

$$A_xB_x;A_xB_y;A_xB_z;A_yB_x;A_yB_y;A_yB_z;A_zB_x;A_zB_y;A_zB_z \qquad (1\text{-}19)$$

y los productos se agrupan en una disposición matricial como la siguiente:

$$\begin{pmatrix} A_xB_x & A_xB_y & A_xB_z \\ A_yB_x & A_yB_y & A_yB_z \\ A_zB_x & A_zB_y & A_zB_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{(1-19)'}$$

En la segunda matriz se reprodujo la primera con las componentes de cada producto como elementos de un nuevo ente llamado ***TENSOR.***

Además de las magnitudes escalares y vectoriales, en la Física existen magnitudes más complejas y que requieren una mayor cantidad de componentes: son los tensores. Tal es el caso del tensor de inercia de un cuerpo rígido en rotación; que es una medida de su resistencia a la rotación, es decir su inercia. Para esto deben especificarse más de tres componentes. En efecto, un tensor de inercia requiere 9 componentes (algunas coincidentes, por ser un tensor simétrico) para definir su magnitud.

Otras magnitudes tensoriales utilizadas en la Física son: el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones en el interior de los cuerpos deformables, la conductividad y el campo de inducción eléctrica $\vec{D}$ en medios anisótropos, etc.

Los tensores tienen sus propias reglas para sumarse y para multiplicarse; también existen reglas para operar entre vectores y tensores pues, como se verá más adelante, los vectores son un caso particular de la familia más amplia de los tensores.

Antes de definir la suma y producto tensorial, definamos una nueva nomenclatura, mucho más adecuada para el tratamiento de estos entes.

A un tensor $\overline{A}$ lo escribiremos con una raya arriba, en lugar de una flecha como al vector; la misma nomenclatura $\overline{A}$ con la raya arriba se utiliza para las matrices por lo cual ya identificaremos, por ahora, el tensor como una matriz cuadrada.

Además las componentes del tensor las designaremos con números de subíndices en lugar de letras. Así los tensores $\overline{A}\ y\ \overline{B}$ se designarán como:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} ; \overline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Y también se empleará la notación: $a_{jk}\ y\ b_{jk}$ para designar las componentes de los tensores, en los cuales los subíndices $j\ y\ k$ varían de $1\ a\ 3$ para el espacio ordinario de tres dimensiones.

El hecho de representar o escribir un tensor como una matriz no debe inducir a identificar ambos conceptos. Una matriz es un arreglo de números o de variables por medio del cual se especifica una determinada manera de relacionarse con otros arreglos matriciales: tales como sumas, productos, inversas, etc. Pero fundamentalmente no existen condicionamientos entre los números o variables de tales matrices.

Con las magnitudes tensoriales, por el hecho de ser magnitudes, existen condiciones bien definidas entre sus componentes. Una magnitud tensorial definida en el espacio euclídeo de tres dimensiones tiene 9 componentes, y esas componentes deben cumplir la condición de transformarse, ante un cambio de coordenadas, de acuerdo con las leyes de transformación de coordenadas que detallaremos en el apartado siguiente: **"Los vectores como bases para las teorías de la Física".**

En resumen, las magnitudes tensoriales tienen componentes que pueden disponerse como entes matriciales, cumpliendo todas las reglas de las matrices, pero además sus componentes deben cumplir con otras reglas de transformación de modo tal que no toda matriz es un tensor si bien todo tensor puede representarse como una matriz.

Suma y resta de tensores.

Definiremos la suma de dos tensores como un nuevo tensor $\overline{C}$ tal que:

$$c_{jk} = a_{jk} + b_{jk} \quad para \;\; j,k = 1,2,3 \tag{1-20}$$

que equivale a:

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Los vectores y tensores obedecen las siguientes leyes básicas:

a) Ley de inclusión: Si $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son tensores, su suma también es un tensor.
b) Ley conmutativa de la suma: $\overline{A}+\overline{B}=\overline{B}+\overline{A}$
c) Ley asociativa de la suma: $(\overline{A}+\overline{B})+\overline{C}=\overline{A}+(\overline{B}+\overline{C})$
d) Existe un único tensor nulo o cero tal que para todo tensor $\overline{A} \rightarrow \overline{A}+\overline{0}=\overline{A}$
e) Para todo tensor $\overline{A}$ existe un único tensor $-\overline{A}$ tal que $\overline{A}+(-\overline{A})=\overline{0}$

Multiplicar un vector o un tensor por una constante q equivale a multiplicar todas sus componentes por esa constante; sucede lo mismo que al multiplicar una matriz por una constante.

Multiplicar dos tensores entre sí da origen a una variedad de resultados que caen fuera de los alcances de esta introducción.

Simples e Importantes Tensores

En el álgebra existe un símbolo para indicar ciertas relaciones entre los subíndices; es conocida como **delta** de Kronecker y definida como:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 \; cuando \;\; j = k \\ 0 \; cuando \; j \neq k \end{cases} \tag{1-21}$$

Este símbolo es realmente un tensor de características muy especiales, definido por:

$$\delta_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{I} \qquad (1\text{-}21)'$$

El tensor **delta** de Kronecker coincide con el tensor unidad o identidad y sus componentes tienen el mismo valor en cualquier sistema de coordenadas, ya sean cartesianas ortogonales como en este caso, o sean cilíndricas, esféricas u otras cualesquiera. En el rango de los tensores con 9 componentes (tensores de 2º rango por tener 2 subíndices), es el único tensor con esa característica.

Este tensor (llamado también tensor isotrópico) desempeña el mismo rol en la teoría tensorial que el 1 en el álgebra.

Algunos de sus usos son:

a) Para indicar el módulo de un vector

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$$

Puede ponerse: $A^2 = \delta_{jk} a_j a_k = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2$

b) Para indicar un producto escalar: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \delta_{jk} a_j b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

c) Para indicar un producto vectorial: definiremos antes un nuevo delta con tres subíndices:

$\delta_{hjk} = \varepsilon_{hjk}$ denominado **símbolo de permutación** o **símbolo de Levi-Civita**.

Su definición es: $\varepsilon_{hjk} = +1$ Si los índices hjk tienen **una permutación par** respecto a los 1, 2, 3. (Ej. es par la jkh)

$\varepsilon_{hjk} = 0$ Si los índices hjk tienen un índice repetido dos o más veces. (Ej. $hjj; kkk; etc.$)

$\varepsilon_{hjk} = -1$ Si los índices hjk tienen **una permutación impar** respecto a los 1, 2, 3. (Ej. impar la hkj)

Entonces un producto vectorial se representa como:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{hjk} a_j b_k$$

y por la regla de los índices repetidos, se suma solamente respecto a ellos, en este caso j, k. El símbolo h designa las tres componentes del seudo vector $\vec{C}$.

$$\therefore \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{hjk} a_j b_k \begin{cases} C_1(\varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2) = C_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ C_2(\varepsilon_{231} a_3 b_1 + \varepsilon_{213} a_1 b_3) = C_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ C_3(\varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1) = C_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{cases}$$

Que son precisamente las componentes $C_1; C_2; C_3$ del resultado.

El universo de los tensores no se limita a los peculiares resultados anteriores, su contenido es muy vasto y variado. Podemos decir que toda la Mecánica Clásica puede ser considerada como una Mecánica Vectorial, lo mismo puede decirse del Electromagnetismo Clásico. A su vez ambas teorías pueden ser tratadas desde el aspecto tensorial y agregarse la Relatividad General cuyo tratamiento es exclusivamente tensorial.

Ejercicio 8.-

Considerando los dos productos básicos entre tres vectores: el producto mixto $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$ y el triple producto vectorial $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$. Obtener sus expresiones (1-16) y (1-18) con el uso del símbolo de Levi-Civita.

<u>Productos entre vectores y tensores</u>

En Dinámica clásica se define el momento angular de la rotación de un cuerpo sólido, como $\vec{L} = I\vec{\omega}$ donde I es el momento de inercia del cuerpo sólido alrededor de un eje fijo.

Con más generalidad se define como $\vec{L} = \overline{J}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$

En la cual $\overline{J}$ es el tensor de inercia de un cuerpo sólido que gira alrededor de un punto fijo y $\vec{\omega}$ es el vector velocidad angular de dicho cuerpo. La ecuación es válida referida a un sistema de ejes ortogonales móviles que giran solidarios con el cuerpo.

El producto $\overline{J}\vec{\omega}$ se llama producto entre tensor y vector (o entre matrices del tipo 3×3 *con* 3×1 dando origen a otra matriz 3×1, tal como es la regla de multiplicación entre matrices). Su desarrollo es el nuevo vector, o nueva matriz 3×1:

$$\overline{J}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \\ I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 \\ I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \end{pmatrix}$$

Con lo cual el momento angular tiene las tres componentes:

$$\vec{L} = \begin{cases} L_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \\ L_2 = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 \\ L_3 = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \end{cases}$$

De esto se deduce que la representación matricial de un vector es una matriz columna. Pero es también posible representar un vector como una matriz fila, pues en ciertos casos es necesaria esa representación para efectuar ciertos productos. En tales casos, al vector columna lo representamos como $\vec{\omega}$ y al vector fila como $\vec{\omega}^T$ o vector transpuesto del anterior.

Para la energía cinética de un cuerpo en rotación alrededor de un punto fijo, la misma tiene como fórmula:

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \bar{J}\vec{\omega} = \begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3\end{pmatrix}$$

En la energía cinética son necesarias ambas representaciones del vector, pues en el segundo producto las dos matrices son de rangos $3\times3\ y\ 3\times1$ obteniéndose otra matriz de rango 3×1, por lo tanto al multiplicar la primera matriz $\vec{\omega}^T$ por la segunda, la primera debe tener un rango $1\times3\ con\ 3\times1 \rightarrow$ obteniéndose una nueva matriz de rango 1×1 lo cual representa un escalar. Precisamente, la energía cinética es un escalar.

Con las dos formas matriciales de un vector, se pueden obtener todos los productos necesarios entre tensores y vectores.

Ejercicio 9.-

Representar mediante productos de matrices el módulo de un vector y el producto escalar de dos vectores.

Solución.

1) Dado el vector $\vec{A}(a_1;a_2;a_3)$ su módulo es

$$A^2 = \vec{A}^T\vec{A} = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a_1 \\ a_2 \\ a_3\end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

2) Con los vectores $\vec{A}(a_1;a_2;a_3)\ y\ \vec{B}(b_1;b_2;b_3)$ su producto escalar es:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{A}^T\vec{B} = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}b_1 \\ b_2 \\ b_3\end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

<u>Los vectores como bases para las Teorías de la Física</u>

Es muy conocido el Principio de la Física por el cual todas sus leyes son independientes del sistema de coordenadas en que están definidas.

A pesar de que es necesario tener un particular sistema de coordenadas de referencia para formular matemáticamente una ley, por ejemplo la segunda ley de Newton, el significado de la misma debe ser el mismo, sea el que fuera el sistema elegido. Si el sistema elegido es el cartesiano ortogonal tendrá una forma, si el sistema de referencia es el esférico tendrá otra, pero ambas expresiones formales deben expresar un idéntico contenido.

La forma descripta para expresar las leyes físicas se denomina <u>*covariante*</u> y en tal sentido debemos saber cómo se transforman las magnitudes escalares, vectoriales y tensoriales ante un cambio efectuado en el sistema de coordenadas.

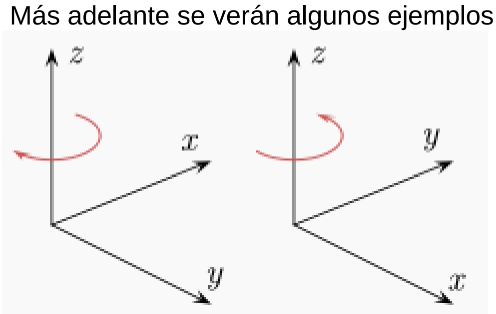
Va de suyo que la necesidad de conocer cómo se transforman las magnitudes implica saber reconocer cuándo una magnitud es vectorial o no. Geométricamente es sencillo reconocer o distinguir un vector de un escalar; sin embargo cuando se trata con expresiones puramente algebraicas o analíticas de vectores pueden surgir dudas sobre sus verdaderas características.

Por ejemplo, se ha definido la multiplicación de un vector por una constante $q\vec{A}$ equivale multiplicar por esa constante a cada una de sus componentes, siendo el resultado otro vector. $q\vec{A} = (qa_1; qa_2; qa_3)$, de módulo qA. Pero en el caso de sumar a un vector una constante q, por ejemplo: $\vec{A} + q$, definiendo el resultado como un ente de módulo $A + q$ y de componentes $(a_1 + q; a_2 + q; a_3 + q)$ el resultado no es un vector ya que $A + q \neq \sqrt{(a_1 + q)^2 + (a_2 + q)^2 + (a_3 + q)^2}$. Ésta y otras razones obligan a tener un proceso que permita definir un vector con mayor precisión.

Las transformaciones posibles en los sistemas de coordenadas de referencia se pueden resumir en:

1.-) Transformaciones lineales entre sistemas cartesianos ortogonales.
2.-)Transformaciones lineales entre sistemas curvilíneos ortogonales (cilíndricos, esféricos, generalizados o lagrangianos, etc.).
3.-) Las transformaciones lineales de Lorentz, entre sistemas ortogonales tetra dimensionales que involucran el espacio-tiempo de la Teoría Relativista.

En el presente resumen nos concentramos solamente en el primer tipo de transformaciones lineales ortogonales. Las mismas constan de translaciones o rotaciones en el plano o en el espacio de tres o de n dimensiones. Dentro de esta categoría existe una transformación lineal llamada impropia que consiste en una inversión de uno de sus ejes, tal como se ve en la figura adjunta. Más adelante se verán algunos ejemplos.



Transformación impropia; transformación común o propia.

Para simplificar, consideremos una rotación ortogonal de ejes en el plano, de un ángulo θ, y un vector $\vec{A}$ que en el nuevo sistema tendrá nuevas componentes.

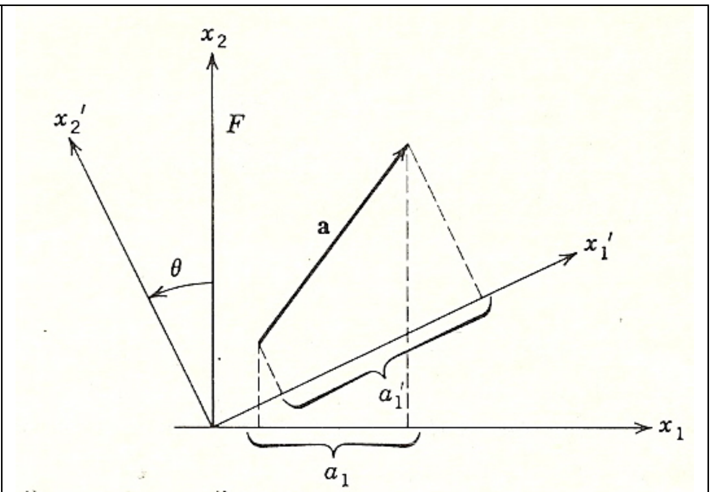
Las componentes de $\vec{A}$ en sistema sin rotar son $\vec{A}(a_1, a_2)$.

Las componentes de $\vec{A}$ en el sistema rotado serán:

$$a_1' = a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta$$

$$a_2' = -a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta$$

Por las simples reglas trigonométricas.



Comprobemos que si el módulo de $\vec{A}$ en el sistema F es $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, en el nuevo sistema rotado F' será el mismo valor:

$$\sqrt{\begin{array}{l} a_1^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + a_2^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \\ +(2a_1a_2\cos\theta\sin\theta - 2a_1a_2\cos\theta\sin\theta) \end{array}} \quad \therefore \; = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Es decir, efectivamente se cumple la igualdad de los módulos. La rotación de ejes efectuada se denomina, en general, transformación ortogonal.

Las nuevas componentes de un vector (o de un tensor) luego de una transformación ortogonal se pueden obtener con diferentes recursos matemáticos: un forma pueden ser las ecuaciones algebraicas; otras, mediante el uso de matrices o una alternativa con el solo empleo de los subíndices.

Si llamemos $\vec{X}(x_1; x_2)$ a un vector genérico en el plano, luego de la transformación se tendrá:

1.-) <u>Con ecuaciones algebraicas</u>

$$\begin{cases} x_1' = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \\ x_2' = -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{cases} \qquad (1\text{-}22)$$

Para una transformación espacial, llamando con a_{jk} los cosenos directores entre los ejes x_j y x_k:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \qquad (1\text{-}23)$$

2.-) <u>En forma matricial</u>

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Y para la transformación espacial:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}24)$$

siendo su transformación inversa:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}24)'$$

La transformación es ortogonal cuando la matriz de los coeficientes cumple con la condición:

$$\overline{A}^T = \overline{A}^{-1}$$

es decir, la transpuesta de la matriz es igual a su inversa; además el determinante de la misma matriz es igual a la unidad.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$$

Como los coeficientes son los cosenos directores del vector, en todos los casos ese determinante será unitario.

3.-) **<u>Con los subíndices:</u>** $x_j^{'} = a_{jk} x_k \quad Para\ \ j,k = 1,2,3$ (1-25)

Donde la suma se realiza sobre el índice repetido, obteniéndose (1-22).

Con estas definiciones podemos ahora decir que si se tiene tres componentes de un ente cualquiera $\vec{A}, \vec{B}, \ldots$ ellas son verdaderamente componentes de un vector si las mismas se transforman como las coordenadas $A_j^{'} = a_{jk} A_k \quad Para\ \ j,k = 1,2,3$.

Ésta se denomina "definición analítica de un vector" y con ligeras modificaciones se aplica a la definición analítica de un tensor.

Ejercicio 10.- Demostrar:

1) La suma de dos vectores es otro vector.
2) El producto de un vector por una constante es otro vector.
3) La suma de una constante con un vector no es otro vector.

Solución.

1: La suma de dos vectores es otro vector,

O sea: $\vec{B} = \vec{U} + \vec{V} \begin{cases} b_x = u_x + v_x \\ b_y = u_y + v_y \\ b_z = u_z + v_z \end{cases}$ entonces $\vec{B}' = \vec{U}' + \vec{V}' \begin{cases} b'_x = u'_x + v'_x \\ b'_y = u'_y + v'_y \\ b'_z = u'_z + v'_z \end{cases}$

$$\begin{aligned} b_x^{'} &= (a_{11}u_x + a_{12}u_y + a_{13}u_z) + (a_{11}v_x + a_{12}v_y + a_{13}v_z) \\ b_y^{'} &= (a_{21}u_x + a_{22}u_y + a_{23}u_z) + (a_{21}v_x + a_{22}v_y + a_{23}v_z) \\ b_z^{'} &= (a_{31}u_x + a_{32}u_y + a_{33}u_z) + (a_{31}v_x + a_{32}v_y + a_{33}v_z) \end{aligned} \qquad (1\text{-}26)$$

Como cada coordenada se transforma de acuerdo con (1-25) concluimos que la suma de vectores es otro vector.

2: El producto de un vector por una constante es otro vector.

$\vec{B} = \alpha\vec{U} \begin{cases} b_x = \alpha u_x \\ b_y = \alpha u_y \\ b_z = \alpha u_z \end{cases}$ Por lo cual $\vec{B}' = \alpha\vec{U}' \begin{cases} b'_x = \alpha u'_x \\ b'_y = \alpha u'_y \\ b'_z = \alpha u'_z \end{cases}$ (1-27)

Dado que la constante no se transforma, la demostración es clara en sí misma. Este caso es asimilable al de la suma de dos vectores iguales:

$$\vec{B} = \vec{U} + \vec{U} = 2\vec{U} \rightarrow \alpha\vec{U} \qquad \vec{B}' = \vec{U}' + \vec{U}' = 2\vec{U}' \rightarrow \alpha\vec{U}'$$

Con lo cual queda claro que la constante no se transforma.

3: Si un nuevo ente está definido como la suma de un vector y una constante, ese nuevo ente no será un vector, tenemos:

$$\vec{B} = \vec{U} + \alpha \begin{cases} b_x = u_x + \alpha \\ b_y = u_y + \alpha \\ b_z = u_z + \alpha \end{cases} \quad \text{Por lo cual} \quad \vec{B}' = \vec{U}' + \alpha \begin{cases} b'_x = u'_x + \alpha \\ b'_y = u'_y + \alpha \\ b'_z = u'_z + \alpha \end{cases}$$

Desarrollado:

$$\begin{aligned} b'_x &= (a_{11}u_x + a_{12}u_y + a_{13}u_z) + \alpha \\ b'_y &= (a_{21}u_x + a_{22}u_y + a_{23}u_z) + \alpha \\ b'_z &= (a_{31}u_x + a_{32}u_y + a_{33}u_z) + \alpha \end{aligned} \qquad (1\text{-}28)$$

No puede ser un vector ya que no se transforma como la suma de dos vectores y además vimos que el módulo de B' no coincide con el módulo de sus componentes.

Ejercicio 11.-

En el plano $x - y$ se efectúa la transformación ortogonal del vector $\vec{A}$ dada por la siguiente matriz $\overline{T} = \begin{pmatrix} 0,9397 & 0,342 \\ -0,342 & 0,9397 \end{pmatrix}$ Verificar que cumple con las dos condiciones: transpuesta igual a inversa y determinante igual a 1.

Solución.

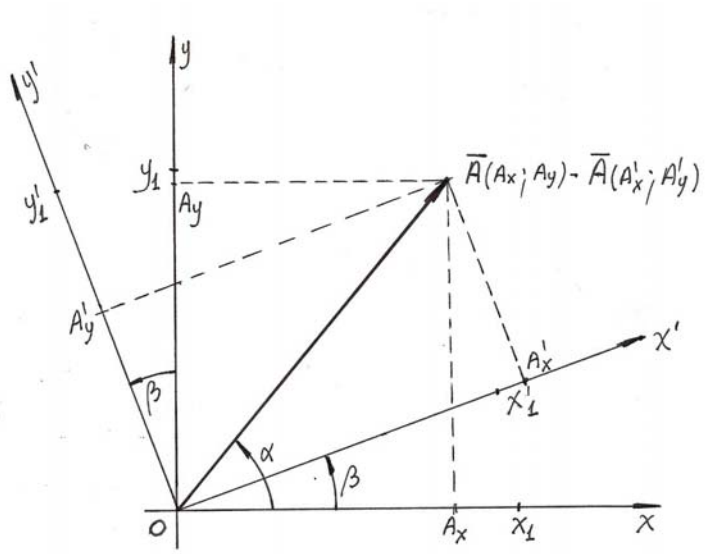


Fig. 1-6

La transformación se refiere a las coordenadas del vector $\vec{A}$. El módulo del vector $\vec{A}$ es 100 y sus componentes en la terna $x - y$ son $\vec{A}(64,28;\ 76,6)$. Para hallar sus componentes en la terna rotada $x'-y'$ debido a la transformación $\overline{T}$ se aplican las fórmulas:

$$\begin{pmatrix} A_x' \\ A_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9397 & 0,342 \\ -0,342 & 0,9397 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto las nuevas componentes del vector $\vec{A}$ referidas a la nueva terna, son:

$$\begin{cases} A_x' = 0,9397 A_x + 0,342 A_y \\ A_y' = -0,342 A_x + 0,9397 A_y \end{cases} \quad \text{Reemplazando} \quad \begin{cases} A_x' = 86,6 \\ A_y' = 50,0 \end{cases}$$

Calcular el módulo $\sqrt{A_x'^2 + A_y'^2} = \sqrt{86,6^2 + 50^2} = 100$

Su valor coincide con el módulo del vector $\vec{A}$ de componentes $A_x\ A_y$.

Hallar el ángulo $\alpha-\beta$ formado por el vector $\vec{A}$ con el eje x'.

$$\tan\alpha = \frac{A_y}{A_x} = \frac{76,6}{64,28} = 1,19 \therefore \alpha = 50^{\circ}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{A_y'}{A_x'} = \frac{50}{86,6} = 0,577 \ \therefore \alpha-\beta = 30^{\circ}$$

confirmando que el ángulo de rotación α fue de 20° tal como se desprende de la matriz de rotación $\overline{T}$ (explicar por qué).

Finalmente, la transpuesta de $\overline{T}$ *es* $\overline{T}^T = \begin{pmatrix} 0,9397 & -0,342 \\ 0,342 & 0,9397 \end{pmatrix}$

Y su inversa es: $\overline{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,9397 & -0,342 \\ 0,342 & 0,9397 \end{pmatrix}$ Con un determinante $\Delta_T = 1$.

Confirmando ser una transformación ortogonal.

Ejercicio 12.- **Transformaciones Impropias**

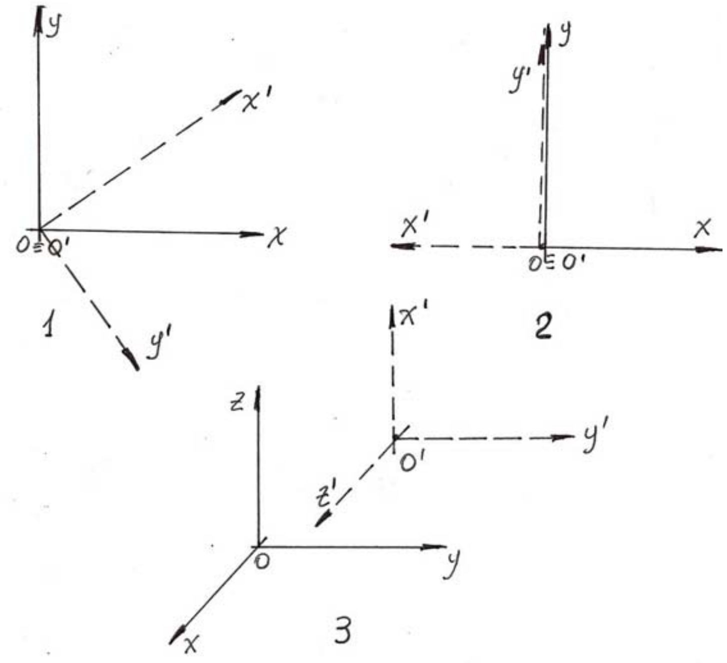


Fig. 1-7

Se denomina transformaciones impropias a las transformaciones lineales y ortogonales cuya matriz de transformación tiene un determinante igual a -1.

En la Fig. 1-7 se observan varios casos de transformaciones impropias o indirectas.
En todos los casos se observa que la posición final, luego de la transformación, no es alcanzable mediante rotaciones simples de las coordenadas iniciales, se requiere una rotación y una inversión.

<u>En el caso</u> 1 de la Fig. 1-7, la matriz que realiza la transformación impropia es

$$\overline{T} = \begin{pmatrix} 0,766 & 0,643 \\ 0,643 & -0,766 \end{pmatrix}$$

en la cual se puede verificar que es una matriz ortogonal ($\overline{T}^T = \overline{T}^{-1}$) y de determinante -1.

Obsérvese que la terna original, el plano $x - y$, para rotar de $x \to y$ se hace en sentido contrario a las agujas del reloj. Luego de la rotación, para rotar de $x' \to y'$ debe hacerse en el sentido de las agujas del reloj. Por tal motivo la transformación impropia también se denomina inversa.

Para el mismo caso 1 de la Fig. 1-7, compruébese que la transformación

$$\vec{T}_1 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,707 \\ 0,566 & -0,707 \end{pmatrix}$$

realiza también la misma transformación anterior y que su determinante $\Delta_{T_1} = -1$.
<u>Verificar</u> si es una transformación ortogonal y comentar el resultado.

<u>En el caso</u> 2 de la Fig. 1-7, la matriz que realiza la transformación impropia es

$$\overline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en la cual es posible verificar que es una matriz ortogonal ($\overline{T}^T = \overline{T}^{-1}$) y de determinante -1.

<u>En el caso</u> 3 de la Fig. 1-7, la matriz que realiza la transformación impropia es para el espacio tridimensional siendo su expresión:

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sin tener en cuenta la traslación, verificar que la transformación es ortogonal ($\overline{T}^T = \overline{T}^{-1}$) y de determinante -1.

<u>Otras relaciones vectoriales</u>

<u>Comprobar los siguientes resultados</u>

$$1)\ (\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{D})\vec{C} - (\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{D}$$

$$2)(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

$$3)\ \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$$

4) Comprobar las características de ortogonalidad, hallando sus transpuestas e inversas, de las transformaciones siguientes. Hallar también el valor de sus determinantes.

$$\overline{T} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix};\overline{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\overline{T} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Sistemas de Coordenadas</u>

Los sistemas de coordenadas se han creado para ubicar dos o más puntos en un espacio plano o, con algunas restricciones, en un espacio tridimensional. Su funcionalidad permite también representar funciones, como la ecuación de la recta en el plano, las ecuaciones de la circunferencia, la parábola, la elipse, etc., la imagen en el plano de figuras tridimensionales, también es posible con adecuados convenios de representación como las superficies de nivel y otros.

Cuando se ha definido cómo deben medirse las longitudes en el espacio tridimensional, se dice que se ha definido **su métrica**.

Según sea el sistema de coordenadas elegido, será diferente la forma de medir las longitudes o su métrica. Los sistemas de coordenadas más importantes son los ortogonales, en los cuales todos los ejes son normales entre sí.

Los sistemas ortogonales más utilizados son:

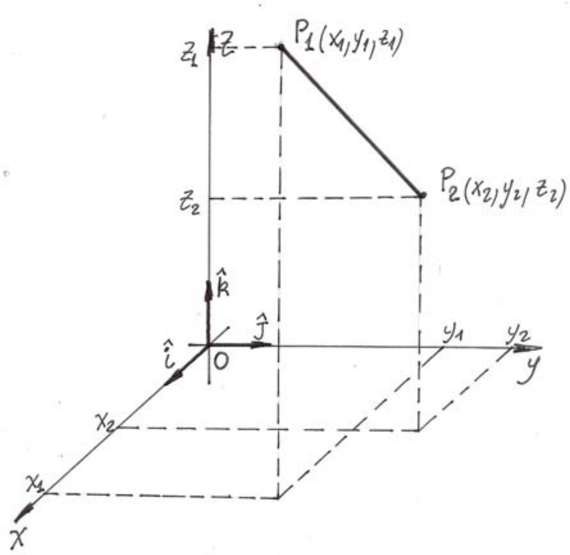
1.-) Sistemas cartesianos ortogonales para el plano y para el espacio.
2.-) Sistemas ortogonales polares para el plano y cilíndricos para el espacio.
3.-) Sistemas ortogonales esféricos para el espacio.
4.-) Sistemas ortogonales curvilíneos generales, para el plano y para el espacio.

1.-) <u>Sistemas Ortogonales Cartesianos.</u>

Tal como se ve en diagrama, la métrica definida para medir la distancia entre dos puntos en el espacio es $\overline{P_1P_2} = d$:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \\ + (z_2 - z_1)^2 \qquad (1-29)$$

En un plano, la distancia cuadrática se define por: $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$



Los versores (vectores de módulo unitario) se designan generalmente con las letras $\hat{e}_1; \hat{e}_2; \hat{e}_3$, pero en coordenadas cartesianas se ha impuesto el uso de las letras

$$\hat{i}\,; \hat{j}\,; \hat{k}$$

Que entre sí cumplen las condiciones:

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \quad y \quad \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}\ ;\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}\ ;\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad y \quad \hat{i} \times \hat{i} = 0\ ;\ \hat{j} \times \hat{j} = 0\ ;\ \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

Teniendo presente la (1-29) se define en coordenadas cartesianas ortogonales el intervalo elemental o desplazamiento elemental (o métrica), al diferencial:

$$d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

cuya expresión cuadrática es:

$$\boxed{dr^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2} \qquad (1-30)$$

que por ser una distancia entre dos puntos constituye **un invariante**, independiente del sistema de coordenadas. Es decir, la expresión, en términos de componentes vectoriales, dependerá del sistema en que se exprese, pero el valor $ds^2 = dr^2$ es invariante.

2.-) **Sistema polar y cilíndrico**

La distancia entre dos puntos o el vector posición $\vec{r} = \overline{OP}$, se define en estas coordenadas como:

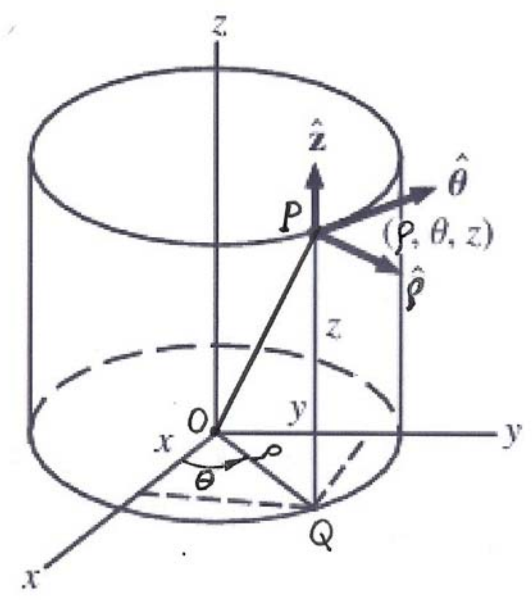
$$\vec{r} = \overline{OP} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \qquad \text{(1-31)}$$

Los versores unitarios en las tres direcciones los definiremos como:

$$\hat{e}_\rho = \hat{\rho} \ ; \ \hat{e}_\theta = \hat{\theta} \ ; \ \hat{e}_k = \hat{k}$$

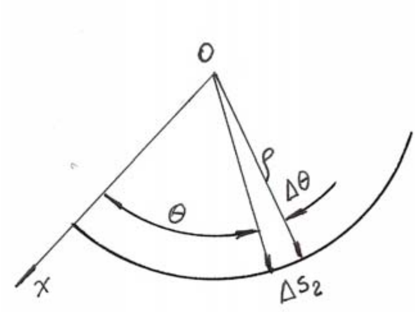
Para convertir esa distancia a las coordenadas cartesianas se proyecta sobre los tres ejes:

$$\vec{r} = \rho\cos\theta\hat{i} + \rho\sin\theta\hat{j} + z\hat{k}$$



La distancia elemental entre dos puntos $\overline{P_1P_2}$, infinitamente próximos, se calcula efectuando tres desplazamientos en las direcciones de los tres versores.

Para el cálculo del arco elemental Δs_2 recurrimos al gráfico adjunto para definir su valor.
Para desplazarse sobre el arco de radio ρ se debe incrementar el ángulo θ en un $\Delta\theta$ que en radianes mide $\Delta\theta = \dfrac{\Delta s_2}{\rho}$ de donde se obtiene el valor del elemento de arco: $\Delta s_2 = \rho.\Delta\theta$.



Así, cada desplazamiento viene dado por:

$$\hat{e}_\rho):\ ds_1 = d\rho; \qquad \hat{e}_\theta): ds_2 = \rho d\theta; \qquad \hat{e}_k): ds_3 = dz$$

$$\therefore \quad d\vec{r} = d\rho\,\hat{e}_\rho + \rho d\theta\,\hat{e}_\theta + dz\,\hat{e}_k$$

y el desplazamiento elemental (o métrica), al diferencial

$$\boxed{ds^2 = dr^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2} \qquad \text{(1-32)}$$

Los versores son: $\hat{e}_\rho = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$; $\hat{e}_\theta = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$; $\hat{e}_k = \hat{k}$

Las relaciones entre ambos sistemas de coordenadas (directas e inversas) son:

$$x = \rho\cos\theta \quad ; \quad y = \rho\sin\theta \;; \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \;; \; \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \;; \; z = z \qquad (1\text{-}33)$$

Para el caso plano, las coordenadas se denominan polares y las relaciones son un caso particular de las cilíndricas:

$$\vec{r} = \rho\cos\theta\hat{i} + \rho\sin\theta\hat{j} \qquad d\vec{r} = d\rho\,\hat{e}_\rho + \rho d\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$\boxed{ds^2 = dr^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}$$

Y las relaciones entre ambos sistemas de coordenadas (directas e inversas) son:

$$x = \rho\cos\theta \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = \rho\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

3.-) **Sistema esférico**

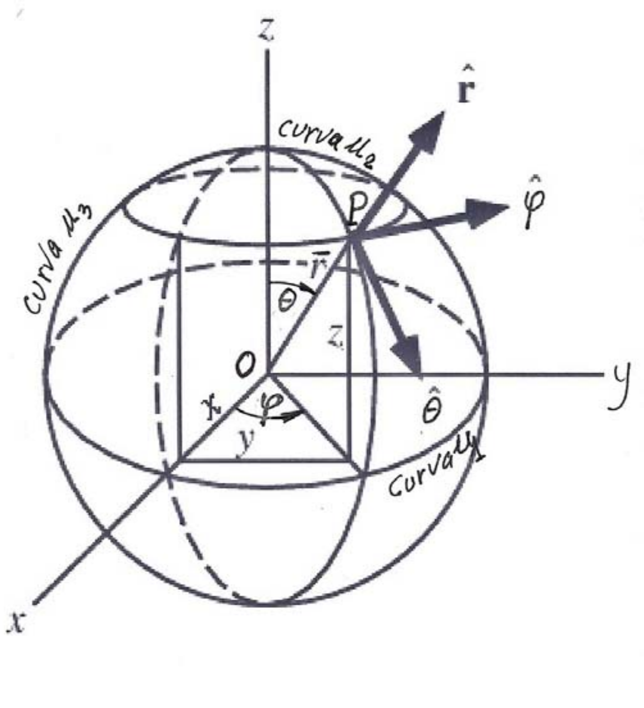
La distancia entre el origen y el punto P se define en estas coordenadas por su vector posición:

$$\vec{r} = \overline{OP} = r\,\hat{r} \qquad (1\text{-}34)$$

Los versores unitarios en las tres direcciones los definiremos como:

$$\hat{e}_r = \hat{r} \;;\; \hat{e}_\theta = \hat{\theta} \;;\; \hat{e}_\varphi = \hat{\varphi}$$

Las curvas u_1, u_2, u_3 son las intersecciones de la superficie esférica con los tres planos coordenados $x - y, y - z, z - x$



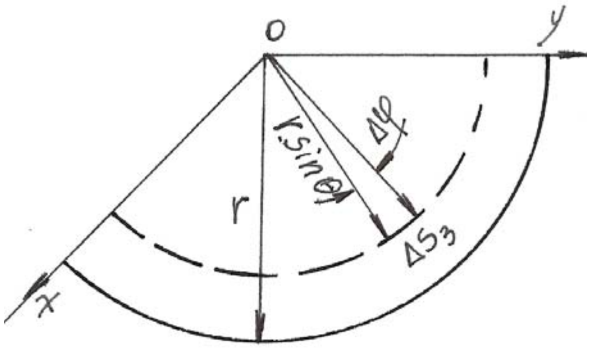
Para convertir las componentes de $\vec{r} = \overline{OP}$ a sus componentes en coordenadas cartesianas, se proyecta el vector posición sobre los tres ejes cartesianos:

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + r\cos\theta\hat{k} \qquad (1\text{-}35)$$

La distancia elemental entre dos puntos $\overline{P_1P_2}$ se define para el caso en que se producen los tres desplazamientos en las direcciones de los tres versores.

El desplazamiento según $\hat{e}_\theta$ se calcula de la misma forma que en el caso de las coordenadas cilíndricas.

Pero el cálculo del desplazamiento Δs_3 según $\hat{e}_\varphi$ debe hacerse teniendo en cuenta que estamos sobre una circunferencia de radio menor al máximo que es r.



El radio menor vale $r.\sin\theta$ y en consecuencia el ángulo que debe incrementarse será:

$\Delta\varphi = \dfrac{\Delta s_3}{r.\sin\theta}$ de donde se deduce el valor del arco elemental Δs_3.

Así, cada desplazamiento viene dado por:

$$\hat{e}_r):\ ds_1 = dr; \qquad \hat{e}_\theta):ds_2 = rd\theta; \qquad \hat{e}_\varphi):ds_3 = r\sin\theta d\varphi$$

$$\therefore \quad d\vec{r} = dr\,\hat{e}_r + rd\theta\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\hat{e}_\varphi \qquad \text{(1-36)}$$

y el desplazamiento elemental (o métrica), al diferencial

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2} \qquad \text{(1-36)'}$$

Y los versores: $\hat{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$

$$\hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j}\,'$$

$$\hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi \times \hat{e}_r = \cos\theta\cos\varphi\hat{i} + \cos\theta\sin\varphi\hat{j} - \sin\theta\hat{k}$$

Las relaciones entre ambos sistemas de coordenadas cartesianas y esféricas (directas e inversas) son:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \qquad \text{(1-37)}$$

$$z = r\cos\theta \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Como resumen se elaboran los siguientes cuadros comparativos.

	Desplazamientos elementales

Coordenadas Cartesianas	$d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$
Coordenadas Polares	$d\vec{r} = d\delta\,\hat{e}_\delta + \delta d\theta\,\hat{e}_\theta$
Coordenadas Cilíndricas	$d\vec{r} = d\delta\,\hat{e}_\delta + \delta d\theta\,\hat{e}_\theta + dz\,\hat{e}_k$
Coordenadas Esféricas	$d\vec{r} = dr\,\hat{e}_r + rd\theta\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{e}_\varphi$

	Elemento de longitud cuadrático
Coordenadas Cartesianas	$\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2}$
Coordenadas Polares	$\boxed{ds^2 = dr^2 = d\delta^2 + \delta^2 d\theta^2}$
Coordenadas Cilíndricas	$\boxed{ds^2 = dr^2 = d\delta^2 + \delta^2 d\theta^2 + dz^2}$
Coordenadas Esféricas	$\boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2}$

Es de observar que mientras en coordenadas cartesianas, delante de los diferenciales hay siempre un 1, en los demás casos aparecen, según la componente, otros factores como

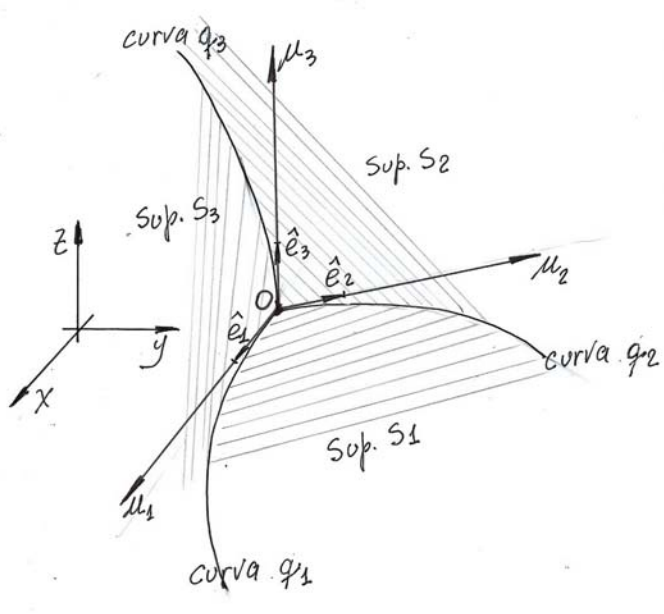
$$\rho;\ r;\ r\sin\theta$$

que modifican la escala en que se miden sus respectivas componentes. Por ello tales factores se denominan **factores de escala**. Veremos enseguida como generalizarlos.

4.-) Sistemas curvilíneos ortogonales para el espacio.

Estos sistemas coordenados son generalizaciones de los ya analizados sistemas cilíndricos y esféricos.

Cada curva q_1, q_2, q_3 es intersección de dos superficies $S_3\,con\,S_1,\ S_1\,con\,S_2, etc.$ Por ejemplo, en las coordenadas esféricas, las tres curvas q_1, q_2, q_3 son la intersección de la superficie esférica con los tres planos paralelos a los planos cartesianos.



En las coordenadas cilíndricas, la superficie lateral del cilindro S_1 tiene por ecuación $\Psi_1(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} = \rho = cte$ y su intersección con el plano $\overline{OZQ}$, o sea la superficie S_2 de ecuación $\Psi_2(x,y,z)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=cte$, define la curva (recta, en este caso) $\overline{QP}$ y al versor $\hat{e}_z$ paralelo (o tangente) a la misma.

De igual forma, en el mismo sistema cilíndrico, la intersección de la superficie cilíndrica S_1 de ecuación $\Psi_1(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}=cte$ con el plano paralelo al $x-y$, o sea, $\Psi_3(x,y,z)=z=cte$ define la circunferencia, o curva que pasa por el punto P, en el cual se define al versor tangente $\hat{e}_\theta$.

Generalizando esta concepción, se definen las coordenadas curvilíneas ortogonales como tres coordenadas u_1,u_2,u_3, cada una como intersección de dos superficies, en las direcciones de tres versores $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3$, normales entre sí.

Cada una de las tres superficies será una cierta función $\Psi_1(x,y,z)=0,$ $\Psi_2(x,y,z)=0,$ $\Psi_3(x,y,z)=0$ que originan en el punto de intersección O las tres curvas ortogonales entre sí, u_i de ecuaciones:

$$\begin{cases} u_1=u_1(x,y,z)=0 \\ u_2=u_2(x,y,z)=0 \\ u_3=u_3(x,y,z)=0 \end{cases} \text{ y que admiten sus recíprocas } \begin{cases} x=\varphi_1(u_1,u_2,u_3)=0 \\ y=\varphi_2(u_1,u_2,u_3)=0 \\ z=\varphi_3(u_1,u_2,u_3)=0 \end{cases} \tag{1-38}$$

Puesto que el Jacobiano de la transformación es distinto de cero, en la región cercana al punto O, se puede probar la existencia de las recíprocas:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}>0$$

Entonces, para ambos sistemas de coordenadas, $el\ x,y,z$ o el u_1,u_2,u_3, un punto P puede especificarse indistintamente en función de (x,y,z) o de (u_1,u_2,u_3).

El desplazamiento elemental, en este sistema de coordenadas, lo escribiremos como una generalización de la expresión en coordenadas esféricas o cilíndricas:

$$d\vec{r}=dr\,\hat{e}_r+rd\theta\,\hat{e}_\theta+r\sin\theta d\varphi\,\hat{e}_\varphi$$

Si a cada uno de los factores de escala lo denominamos h_1,h_2,h_3, su expresión en curvilíneas ortogonales será:

$$d\vec{r}=h_1du_1\,\hat{e}_1+h_2\,du_2\hat{e}_2+h_3\,du_3\hat{e}_3 \tag{1-39}$$

Y la distancia elemental cuadrática será igualmente:

$$\boxed{d\vec{r}\cdot d\vec{r}=dr^2=h_1^2du_1^2+h_2^2\,du_2^2+h_3^2\,du_3^2} \tag{1-40}$$

Los factores de escala se pueden resumir en la tabla siguiente:

	Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
h_1	1	1	1
h_2	1	ρ	1
h_3	1	r	$r\sin\theta$

Con estas equivalencias las expresiones de los desplazamientos elementales y las distancias se resumen en las fórmulas (1-39) y (1-40).

De la ecuación (1-39) se puede derivar el valor de las tangentes (versores tangentes) a las curvas $\begin{cases} x=\varphi_1(u_1,u_2,u_3)=0 \\ y=\varphi_2(u_1,u_2,u_3)=0 \\ z=\varphi_3(u_1,u_2,u_3)=0 \end{cases}$ y dado que $\begin{cases} \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}=h_1\hat{e}_1 \\ \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}=h_2\hat{e}_2 \\ \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}=h_3\hat{e}_3 \end{cases}$

Que aplicadas a cada sistema de coordenadas nos dan:

En cilíndricas. $\vec{r}=\rho\cos\theta\hat{i}+\rho\sin\theta\hat{j}+z\hat{k}$

$$\therefore\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}=\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}=\hat{e}_\rho$$
$$\therefore\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=-\rho\sin\theta\hat{i}+\rho\cos\theta\hat{j}=\delta\hat{e}_\theta$$
$$\therefore\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}=\hat{e}_z=\hat{k}$$

En esféricas. $\vec{r}=r\sin\theta\cos\varphi\hat{i}+r\sin\theta\sin\varphi\hat{j}+r\cos\theta\hat{k}$

$$\therefore\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}=\sin\theta\cos\varphi\hat{i}+\sin\theta\sin\varphi\hat{j}+\cos\theta\hat{k}=\hat{e}_r$$
$$\therefore\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=r\cos\theta\cos\varphi\hat{i}+r\cos\theta\sin\varphi\hat{j}-r\sin\theta\hat{k}=r\hat{e}_\theta$$
$$\therefore\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi\hat{i}+r\sin\theta\cos\varphi\hat{j}=r\sin\theta\hat{e}_\varphi$$

Verificándose en todos los casos la importante condición de $\boxed{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}=h_i\hat{e}_i}$ que la derivada del vector posición respecto al parámetro que define la curva, da un vector tangente a la misma.