Ecs. de Maxwell para cuerpos en Movimiento.

Lino Spagnolo.

Einstein fue uno de los primeros en analizar la Electrodinámica cuando los conductores u objetos cargados tienen un movimiento muy rápido respecto a ternas inerciales o ternas del Laboratorio. (Con velocidades entre $\frac{1}{100}\ y\ \frac{1}{10}\ de\ c$).

En el análisis de los cuerpos cargados en movimiento, de las cuatro ecuaciones de Maxwell afectadas por este fenómeno quedan eliminadas las dos que contienen la Divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad y \quad \nabla \cdot \vec{D} = Q$$

puesto que ambas implican condiciones geométricas y no de movimiento.

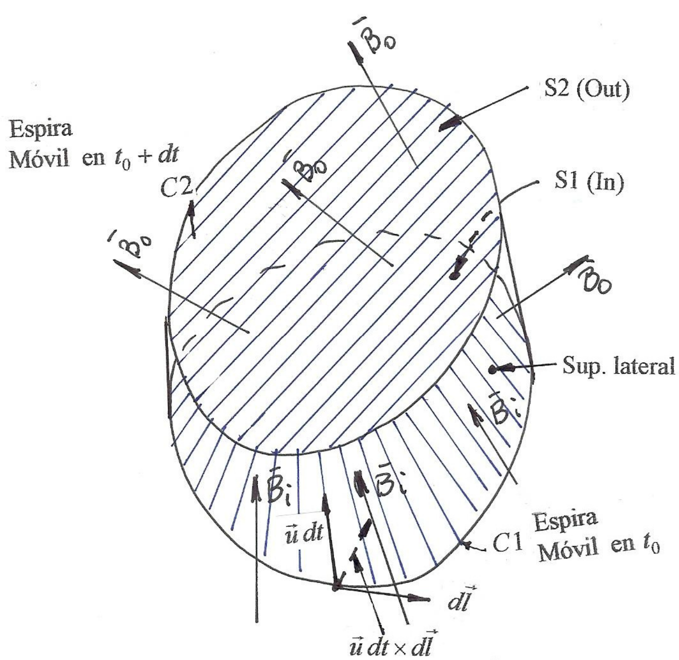
Las dos ecuaciones restantes, la ecuación de Faraday y la de Ampère, sufren modificaciones por contener elementos de circulación y derivadas temporales.

Faraday: $$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ó \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} = fem \qquad (01)$$

Ampère: $$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad ó \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = I \qquad (02)$$

Si tomamos la fórmula de Faraday, la misma dice que la fem inducida en una espira es proporcional a la velocidad de variación del flujo de inducción que pasa a través de ella.

Pero si la espira se mueve con una velocidad $\vec{u}$, se tendrá dos motivos de variación del flujo que la atraviesa: uno por ser el campo $\vec{B}$ variable con el tiempo y otra por el desplazamiento que sufre la espira C_1 hasta C_2 en el tiempo dt.



Por este motivo la derivada $\frac{d\vec{B}}{dt}$, que siempre se efectuó directamente sobre el valor del campo $\vec{B}$, deberá contener ahora nuevos términos que tengan en cuenta el movimiento de la espira.

La nueva derivada la llamaremos 'derivada temporal total del campo vectorial' que se indicará con el símbolo: $\dfrac{\delta\vec{B}}{\delta t}$ (Ver libro de Panofsky Pág.160).

En la derivada del flujo del campo magnético:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\delta\vec{B}}{\delta t}\cdot d\vec{S}} \qquad (03)$$

Si el campo vectorial $\vec{B}$, variable en el tiempo, cruza la superficie S_1 y luego de un tiempo dt cruza la superficie S_2, que se mueve con una velocidad $\vec{u}$, el flujo de salida sufrió diversas modificaciones, por el desplazamiento de S_2 y por la aparición de la superficie lateral ΔS producida por un desplazamiento de la superficie S_1 con un valor de velocidad finito.

La fórmula general de la velocidad de variación del flujo de $\vec{B}$ a través de un dS estará dado por:

$$\iint_S \frac{\delta\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{\iint_{S2}\vec{B}_{t+dt}\cdot\hat{n}\,dS_2 - \iint_{S1}\vec{B}_t\cdot\hat{n}\,dS_1}{dt} \qquad (03')$$

Es decir, como la diferencia entre el flujo total saliente por S_2 y el entrante por S_1 en la unidad de tiempo.

En la figura puede apreciarse que la superficie S_1, con la superficie lateral y con S_2, forman un volumen que puede tomarse como el de un volumen conteniendo una carga eléctrica dada por la divergencia de $\vec{B}$. O sea:

$$\nabla\cdot\vec{B} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}{\Delta v}$$

Con lo cual puede formarse la integral:

$$\iiint_v \nabla\cdot\vec{B}\,dv = \iint_{S2}\vec{B}_{t+dt}\cdot\hat{n}\,dS_2 - \iint_{S1}\vec{B}_t\cdot\hat{n}\,dS_1 + \iint_{\Delta S}\vec{B}\cdot(d\vec{l}\times\vec{u}dt) \quad (04)$$

Carga en el interior del volumen Δv.	Flujo que sale por S_2.	Flujo que entra por S_1.	Flujo que sale por la superficie lateral.

Como el elemento de volumen es: $d\vec{S}_1\cdot\vec{u}\,dt$ lo reemplazamos en la fórmula anterior y despejamos de la misma el flujo saliente:

$$\iint_{S2}\vec{B}_{t+dt}\cdot\hat{n}\,dS_2 = \iiint_v \nabla\cdot\vec{B}\,(d\vec{S}_1\cdot\vec{u}\,dt) + \iint_{S1}\vec{B}_t\cdot\hat{n}\,dS_1 - \iint_{\Delta S}\vec{B}\cdot(d\vec{l}\times\vec{u}dt)$$

Agregándose las modificaciones simplificativas de sacar el dt fuera de la integral:

$$\iint_{S2} \vec{B}_{t+dt} \cdot \hat{n}\, dS_2 = dt \iint_S \nabla \cdot \vec{B}\,(d\vec{S}_1 \cdot \vec{u}) + \iint_{S1} \vec{B}_t \cdot \hat{n}\, dS_1 + dt \int_C \vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{l}\,) \tag{05}$$

También se invirtió el signo en la última integral mediante el cambio de signo del producto vectorial.

Por definición de derivada, pondremos:

$$\iint_{S1} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n}\, dS_1 = \frac{\iint_{S1} \vec{B}_{t+dt} \cdot \hat{n}\, dS_1 - \iint_{S1} \vec{B}_t \cdot \hat{n}\, dS_1}{dt}$$

$$\therefore\ \iint_{S1} \vec{B}_t \cdot \hat{n}\, dS_1 = \iint_{S1} \vec{B}_{t+dt} \cdot \hat{n}\, dS_1 - dt \iint_{S1} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n}\, dS_1 \tag{06}$$

Restando $\left[(05)-(06)\right]$ dividiendo ambas por dt y teniendo en cuenta (03’) queda:

$$\iint_{S2} \vec{B}_{t+dt} \cdot \hat{n}\, dS_2 = dt \iint_S \nabla \cdot \vec{B}\,(d\vec{S} \cdot \vec{u}) + \iint_{S1} \vec{B}_t \cdot \hat{n}\, dS_1 + dt \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{l}\,)$$

$$\iint_{S1} \vec{B}_t \cdot \hat{n}\, dS_1 = \iint_{S1} \vec{B}_{t+dt} \cdot \hat{n}\, dS_1 - dt \iint_{S1} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n}\, dS_1$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \nabla \cdot \vec{B}\,(d\vec{S} \cdot \vec{u}) + \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{l}\,) + \iint_{S1} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n}\, dS_1} \tag{07}$$

Aplicando el teorema de Stokes a la integral $\int_C \vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{l}\,)$ tendremos:

$$\int_C \vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{l}\,) = \oint_C (\vec{B} \times \vec{u}) \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times (\vec{B} \times \vec{u}) \cdot d\vec{S}$$

Reemplazando en (07):

$$\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left[(\nabla \cdot \vec{B})\vec{u} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{u}) + \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right] \cdot \hat{n} dS$$

$$\boxed{\iint \frac{\delta \vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left[\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{u}) + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{u} \right] \cdot d\vec{S}}$$

Teniendo presente (03) e igualando los contenidos de la integral:

$$\boxed{\frac{\delta \vec{B}}{\delta t} = \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{u}) + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{u}} \qquad (08)$$

Siendo la última ecuación la expresión de la derivada temporal total del campo vectorial. Ecuación que Jackson (P.206) denomina **derivada convectiva** y que da como fórmula general: $\frac{\delta \vec{B}}{\delta t} = \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{B}$ que es la conocida derivada direccional de una función vectorial, admitiendo la solución: $= \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{u}) + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{u}$

Si retomamos la ecuación de Faraday $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, se debe reemplazar la derivada del campo inductivo por la expresión (08) teniendo en cuenta que en este caso particular la misma se simplifica puesto que la

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Quedando entonces:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{B} \times \vec{u})} \qquad (09)$$

(Ver libro "Interacción Electromagnética" de Quintana-Aguilar, Ed. Reverté 2007, Pág.186)

Luego la Ley de Faraday para medios en movimiento, con campos indicados con $\vec{E}'$ *y* $\vec{B}'$, será:

$$\oint \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{u})\right) \cdot d\vec{S} = fem$$

Pero ahora el campo eléctrico $\vec{E}'$ que circula alrededor del circuito es el medido en la terna móvil, dado que la Ley de Faraday se aplica específicamente a la corriente medida en la espira a través de la cual pasa el flujo del campo magnético sin importar el motivo por el cual ese flujo es variable.

Si aplicamos el teorema de Stokes a la fórmula anterior, tenemos:

$$\nabla \times \vec{E}' - \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \therefore \quad \boxed{\nabla \times (\vec{E}' - \vec{u} \times \vec{B}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \qquad (09')$$

Esta ecuación representa los dos casos de la Ley de Faraday, si la espira o el conductor se mueve con velocidad $\vec{u}$, la fórmula es la (09'), si la espira está en reposo y solamente varía el flujo del campo $\vec{B}$ entonces la fórmula es la (01), o sea:

$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Y además verificamos que el campo móvil es: $\boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}}$

La validez de la fórmula (09') es para los casos en que la velocidad de la espira en pequeña frente a la velocidad de la luz, pero importante a los efectos prácticos.

El mismo procedimiento debe emplearse con la ecuación (02) de Ampère:

$$\nabla\times\vec{H}'=\vec{J}_C+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\nabla\times(\vec{D}\times\vec{u})+(\nabla\cdot\vec{D})\vec{u}$$

Reemplazando: $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$ queda:

$$\boxed{\nabla\times\vec{H}'=\vec{J}_C+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\nabla\times(\vec{D}\times\vec{u})+\rho\vec{u}} \qquad (10)$$

En la nueva fórmula aparecen cuatro tipos de corrientes eléctricas:

$\nabla\times\vec{H}'=\quad \vec{J}_C+$	$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+$	$\nabla\times(\vec{D}\times\vec{u})+$	$\rho\vec{u}$
$\vec{J}_C$: Corriente de conducción.	Corriente de desplazamiento.	Corriente de Röntgen.o de magnetización.	Corriente de convección.

Heinrich Hertz comenzó a estudiar y desarrollar estos temas hacia 1880, y posteriormente W. Röntgen, junto con los físicos Eichenwald y Rowland, pudieron comprobar experimentalmente la existencia de dos nuevos tipos de corrientes.

La corriente de desplazamiento fue en su origen postulada por Maxwell, dado que la fórmula de Ampère

$$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=\iint_S\vec{J}_C\cdot d\vec{S}=I$$

mostraba ciertas fallas en los circuitos con capacitores. Luego esa corriente de desplazamiento fue ampliamente justificada por los ensayos y experiencias.

La corriente de convección también era conocida en la época, la misma no requiere conductores por lo cual no satisface la Ley de Ohm. La corriente de convección fluye a través de un aislador, como un líquido, un gas o el vacío. Un haz de electrones en un tubo de Röntgen forma una corriente de convección. Básicamente son cargas en movimiento en un dieléctrico.

La corriente $\nabla\times(\vec{D}\times\vec{u})$ que aparecía en las ecuaciones de Hertz, fue puesta de manifiesto por Röntgen muchos años más tarde. Esta corriente se debe a la corriente de desplazamiento que existe en el interior de un dieléctrico que, al moverse con una velocidad $\vec{u}$, es capaz de generar un campo magnético variable en su entorno y fue detectado en la experiencia de Röntgen.
Más tarde se realizaron mediciones más precisas y se comprobó que esta corriente se debía a la polarización del medio $\vec{P}$, más que a la corriente de desplazamiento, con lo cual la fórmula quedó como:

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_C + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{P}\times\vec{u}) + (\nabla\cdot\vec{P})\vec{u} \qquad (11)$$

Los sucesivos experimentos de Eichenwald y Rowland, así como de los más recientes, confirmaron plenamente las fórmulas (09) y (11).

Además el producto: $\vec{P}\times\vec{u} = \vec{M}$

que constituye el medio polarizado móvil, equivale a un material magnetizado de momento magnético $\vec{M}$. (Ver Panofsky Pág. 163 y 164).

Si formulamos estas ecuaciones para el vacío, en el cual $\rho = 0$ *y* $\vec{J}_C = 0$, tenemos:

$$\nabla\times\vec{E}' = -\frac{1}{\mu_o}\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{H}\times\vec{u})\right) \qquad (12)$$

$$\nabla\times\vec{H}' = \frac{1}{\varepsilon_o}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{E}\times\vec{u})\right) \qquad (13)$$

En los años 1900 estos resultados ya se conocían y Einstein los estudió para incorporarlos a su famosa Teoría de Relatividad Restringida publicada en un libro que tituló: "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento" en el año 1905.

Su principal preocupación era conciliar la Mecánica de Newton y Lagrange con el Electromagnetismo de Maxwell y Hertz. El trabajo que se propuso era demostrar que en lugar de las ecuaciones de Galileo para pasar de un sistema en reposo relativo a otro en movimiento, las ecuaciones de transformación debían ser otras que las de Galileo, y que además, esas nuevas ecuaciones conducirían automáticamente de las (01) y (02) a las (09) y (10) (Con la diferencia que en las dos últimas no se tiene en cuenta el factor relativista γ).

Para llegar a esa demostración se utilizarán las ecuaciones (12) y (13) por referirse a un ambiente universal y sencillo como el vacío, pero además se escribirán en unidades del sistema gaussiano por incluir expresamente la velocidad de la luz, hecho importante en la Teoría de Relatividad.

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{E}' &= -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{H}\times\vec{u})\right)\\ \nabla\times\vec{H}' &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{E}\times\vec{u})\right)\end{aligned} \qquad (14)$$

Antes de entrar en la demostración de Einstein, escribiremos las dos ecuaciones anteriores en sus componentes cartesianas dado que es la única forma de apreciar la validez de las transformaciones de coordenadas.

Como es usual, a los fines de simplificar la cantidad de términos, suponemos que la velocidad $\vec{u}$ es constante y tiene una única componente de módulo constante V en la dirección x.

Asumiremos entonces que: $\vec{u} = V\,\hat{i} \;\rightarrow V$

Rotor de $(\vec{H}\times\vec{u})$	Rotor de $(\vec{E}\times\vec{u})$

$$\begin{cases} x): -V\dfrac{\partial H_y}{\partial y} - V\dfrac{\partial H_z}{\partial z} \\ y): +V\dfrac{\partial H_y}{\partial x} \\ z): +V\dfrac{\partial H_z}{\partial x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x): -V\dfrac{\partial E_y}{\partial y} - V\dfrac{\partial E_z}{\partial z} \\ y): +V\dfrac{\partial E_y}{\partial x} \\ z): +V\dfrac{\partial E_z}{\partial x} \end{cases} \tag{15}$$

Además: $\nabla\times\vec{E} = \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{k}$

Y $\nabla\times\vec{H} = \left(\dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{k}$

Reemplazando (15) en (14): $\nabla\times\vec{E}' = -\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{H}\times\vec{V})\right)$

$$x):\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{1}{c}\left(-V\frac{\partial H_y}{\partial y} - V\frac{\partial H_z}{\partial z}\right)$$

$$y):\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{1}{c}V\frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$z):\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{1}{c}V\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

Ordenando nos queda:

$$x): \frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(E_z - \frac{V}{c}H_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(E_y + \frac{V}{c}H_z\right)$$

$$y): \frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} = +\frac{\partial}{\partial x}\left(E_z - \frac{V}{c}H_y\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(E_x\right) \qquad (16)$$

$$z): \frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(E_y - \frac{V}{c}H_z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(E_x\right)$$

Esto implica la relación: $\boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{H}\times\vec{V}}$ (Con $\vec{V} = V\,\hat{i}$) aplicada a la fórmula:

$$\nabla\times\vec{E}' = \nabla\times\left[\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{H}\times\vec{V}\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

Procediendo de igual forma con: $\nabla\times\vec{H}' = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{E}\times\vec{V})\right)$ nos queda:

$$x): \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = +\frac{\partial}{\partial y}\left(H_z - \frac{V}{c}E_y\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(H_y + \frac{V}{c}E_z\right)$$

$$y): \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(H_z - \frac{V}{c}E_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(H_x\right) \qquad (17)$$

$$z): \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} = +\frac{\partial}{\partial x}\left(H_y - \frac{V}{c}E_z\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(H_x\right)$$

Que igualmente implica la relación: $\boxed{\vec{H}' = \vec{H} - \frac{1}{c}\vec{E}\times\vec{V}}$ aplicada a la fórmula:

$$\nabla\times\vec{H}' = \nabla\times\left[\vec{H} - \frac{1}{c}\vec{E}\times\vec{V}\right] = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Ahora veremos que a estos mismos resultados llegó Einstein, con el agregado del coeficiente de corrección relativístico γ, aplicando las transformaciones de coordenadas que relacionan sistemas en reposo relativo con sistemas en movimiento uniforme relativo, sin utilizar las derivadas que dedujo Hertz.

La importancia de la nueva teoría consiste en que la electrodinámica de los cuerpos en movimiento se deduce de las mismas ecuaciones de transformación de coordenadas que se utilizarán tanto en Mecánica como en Electromagnetismo a partir de ese momento.

Electrodinámica de los cuerpos en movimiento. (Einstein 1905).

En la época en que Einstein trató el tema eran conocidas las transformaciones de coordenadas de Lorentz, deducidas para explicar el fenómeno de la constancia de la velocidad de la luz medida respecto a cualquier sistema en movimiento (experimento de Michelson y Morley), tanto si el sistema del observador se movía en el sentido en que provenía la luz como si el observador se movía en sentido contrario.

Esta particularidad de la luz había sido comprobada recientemente por Michelson y Morley, y Lorentz ideó unas ecuaciones que “explicaban el fenómeno” proponiendo una cierta contracción de los instrumentos en el sentido de la velocidad $\vec{V}$ del sistema en que se encontraba el observador.

Einstein no aceptó esas ideas y postuló directamente que la velocidad c de la luz era una constante universal en cualquier sistema en que se la midiera.

A partir de ese principio obtuvo las ecuaciones de transformación de Lorentz y que además incluyen la transformación del tiempo (Ver Libro “Relatividad, Cinemática y Dinámica” de L. Spagnolo Pág. 36):

$$\begin{cases} x' = \gamma.(x - V.t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma.(t - \dfrac{V}{c^2}.x) \end{cases} \quad y \ sus \ inversas: \begin{cases} x = \gamma.(x' + V.t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma.(t' + \dfrac{V}{c^2}.x') \end{cases} \qquad (18)$$

En las cuales se ha supuesto que el sistema móvil S' se mueve en el sentido del eje x con una velocidad $\vec{V}$ de módulo constante. Mientras el valor de $\gamma \ es:$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ \ con \ \ \beta^2 = \frac{V^2}{c^2}. \qquad (19)$$

Minkowski propuso la idea de expresar las coordenadas de un suceso mediante un tetravector posición formado por las cantidades:

$$d\vec{r}(dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) \;\; con \;\; x_1 = x; \;\; x_2 = y; \;\; x_3 = z; \;\; x_4 = ict.$$
$$d\vec{r}\,'(dx'_1, dx'_2, dx'_3, dx'_4) \;\; con \;\; x'_1 = x'; \;\; x'_2 = y'; \;\; x'_3 = z'; \;\; x'_4 = ict'.$$

Como esto tuvo una gran aceptación por adaptarse con gran exactitud a las experiencias cinemáticas y dinámicas de las Teorías de la Relatividad restringida y general, las usaremos de aquí en más para las transformaciones de las fórmulas de Maxwell.

Con el tetravector espacio-tiempo las segundas ecuaciones (18) quedan:

$$x_i = \begin{cases} x_1 = \gamma.(x'_1 - i\dfrac{V}{c}.x'_4) \\ x_2 = x'_2 \\ x_3 = x'_3 \\ x_4 = \gamma.(x'_4 + i\dfrac{V}{c}.x'_1) \end{cases} \qquad (20)$$

Las componentes x_i pueden considerarse componentes de cualquier tetravector posición $\vec{R}$, por lo tanto las ecuaciones (20) son las de transformación. Estas ecuaciones serán las empleadas para transformar los tetravectores que aparecen en las ecuaciones de Maxwell.

En electromagnetismo, tenemos por un lado que

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \therefore \quad \mu\vec{H} = \nabla \times \vec{A} \qquad (21)$$

es decir que el campo magnético $\mu\vec{H}$ admite como origen un campo potencial vectorial $\vec{A}$.

Y además, por la ecuación de Faraday para sistemas en reposo, tenemos como válida la ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Combinando las dos ecuaciones:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) \quad \therefore \quad \nabla \times (\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$

Como este rotor es nulo significa que su valor:

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\Psi \qquad (22)$$

Será igual al gradiente de una función potencial Ψ, continua y con derivadas primeras no nulas.

De la cual deducimos que el campo electromagnético será suma de dos funciones potenciales:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\Psi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}} \qquad (23)$$

Definamos un tetravector $\vec{R}$ cuyas componentes sean las del vector $\vec{A}$ y del potencial Ψ de la forma:

$$R_1 = A_x;\ R_2 = A_y;\ R_3 = A_z;\ R_4 = i\Psi. \qquad (24)$$

$$\nabla(i\Psi) = i\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\hat{i} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\hat{j} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}\hat{k}$$

$$\therefore\ -\nabla(i\Psi) = -\left[(iE_x)\hat{i} + (iE_y)\hat{j} + (iE_z)\hat{k}\right]$$

Además al campo electromagnético $(\vec{E} - \vec{B})$ lo representaremos por otro tensor (o matriz) T_{hk} cuyos términos se calculan con la fórmula: (Ver libro "Interacción Electromagnética" de Quintana, Ed. Reverté 2007, Pág.394. O Ver Panofsky Pág. 328)

$$T_{hk} = \frac{\partial R_k}{\partial x_h} - \frac{\partial R_h}{\partial x_k} \qquad (25)$$

Con lo cual: $\quad T_{hk} = -T_{kh} \quad y \quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = T_{44} = 0$

Resulta un tensor anti-simétrico cuyos valores se calculan teniendo en cuenta (24), (21) y además que $R_1, R_2, R_3\ y\ R_4$ no son funciones de x_4.

$$\vec{H} = \nabla\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\hat{k}$$

$$equivalentes\ a: T_{23} \quad T_{32} \qquad T_{31} \quad T_{13} \qquad T_{12} \quad T_{21} \qquad (26)$$

$$\therefore\quad componentes \quad H_x \qquad\qquad H_y \qquad\qquad H_z$$

Más las derivadas:

$$T_{14} = -T_{41} = i\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} = -iE_x;\ T_{24} = -T_{42} = i\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} = -iE_y;\ T_{34} = -T_{43} = i\frac{\partial\Psi}{\partial x_3} = -iE_z$$

El tensor del campo $(\vec{E} - \vec{B})$ es ahora:

$$T_{hk} = \begin{pmatrix} 0 & +H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & +H_x & -iE_y \\ +H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Aplicándole a este tensor las fórmulas de transformación (20) para obtener los campos en un sistema móvil con velocidad $\vec{V}$ en el sentido de las $x's$, por lo cual no se modifican las $x_2 = x'_2 \ ni \ x_3 = x'_3$, o sea: $T_{23} = T'_{23} \ y \ T_{32} = T'_{32}$

$$T_{23} = T'_{23} \ y \ T_{32} = T'_{32}$$

$$\begin{cases} T_{12} = H_z = \gamma.(T'_{12} - i\dfrac{V}{c}.T'_{42}) = \gamma.(H'_z - i\dfrac{V}{c}.iE'_y) \\ T_{13} = -H_y = \gamma.(T'_{13} - i\dfrac{V}{c}.T'_{43}) = \gamma.(-H'_y - i\dfrac{V}{c}.iE'_z) \\ T_{42} = iE_y = \gamma.(T'_{42} + i\dfrac{V}{c}.T'_{12}) = \gamma.(iE'_y + i\dfrac{V}{c}.H'_z) \\ T_{43} = iE_z = \gamma.(T'_{43} + i\dfrac{V}{c}.T'_{13}) = \gamma.(iE'_z - i\dfrac{V}{c}.H'_y) \end{cases}$$

Igualando las componentes:

$$\begin{cases} H_x = H'_x \\ H_y = \gamma.(H'_y - \dfrac{V}{c}.E'_z) \\ H_z = \gamma.(H'_z + \dfrac{V}{c}.E'_y) \end{cases} \quad \begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma.(E'_y + \dfrac{V}{c}.H'_z) \\ E_z = \gamma.(E'_z - \dfrac{V}{c}.H'_y) \end{cases} \tag{28}$$

Recíprocamente, si quisiéramos pasar de un sistema móvil a un sistema fijo, simplemente se invierte el sentido de la velocidad $-\vec{V}$.

$$\begin{cases} H'_x = H_x \\ H'_y = \gamma.(H_y + \dfrac{V}{c}.E_z) \\ H'_z = \gamma.(H_z - \dfrac{V}{c}.E_y) \end{cases} \quad \begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma.(E_y - \dfrac{V}{c}.H_z) \\ E'_z = \gamma.(E_z + \dfrac{V}{c}.H_y) \end{cases} \tag{28'}$$

Aquí está claro que al pasar de un sistema electromagnético en reposo a un sistema móvil, las ecuaciones de las componentes de los campos cambian notablemente.

Además, como estas ecuaciones de transformación de las componentes del campo eléctrico y del campo magnético se transforman como las coordenadas, diremos que son covariantes con las coordenadas.

En otras palabras, si las componentes de un campo vectorial, ante una transformación de coordenadas, varían como las coordenadas, no será posible notar ningún cambio y se dirá que esos vectores son invariantes ante dicho cambio de coordenadas.

Concluiremos que, de acuerdo con el primer postulado de la Teoría de la Relatividad, las ecuaciones de Lorentz determinan que las ecuaciones de Maxwell conservan su forma luego de la transformación. O sea, tienen igual forma en todos los sistemas inerciales. (Ver libro de Relatividad citado, Pág. 84).

Si ahora quisiéramos ver como se transforman las ecuaciones de Maxwell, por ejemplo las dos analizadas anteriormente:

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{29}$$

Aplicaríamos las ecuaciones (28):

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} &= -\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\gamma\frac{\partial}{\partial y}(E'_z - \frac{V}{c}.H'_y) + \gamma\frac{\partial}{\partial z}(E'_y + \frac{V}{c}.H'_z) \\ \frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} &= +\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\gamma\frac{\partial}{\partial x}(E'_z - \frac{V}{c}.H'_y) - \frac{\partial E'_x}{\partial z} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} &= -\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\gamma\frac{\partial}{\partial x}(E'_y + \frac{V}{c}.H'_z) + \frac{\partial E'_x}{\partial y} \end{aligned} \tag{30}$$

Ídem con:

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\gamma\frac{\partial}{\partial y}(H'_z+i\frac{V}{c}.E'_y)-\gamma\frac{\partial}{\partial z}(H'_y-i\frac{V}{c}.E'_z)\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}=\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{\partial H'_x}{\partial z}-\gamma\frac{\partial}{\partial x}(H'_z+i\frac{V}{c}.E'_y)\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\gamma\frac{\partial}{\partial x}(H'_y-i\frac{V}{c}.E'_z)-\frac{\partial H'_x}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Comprobamos que con las fórmulas de transformación de Lorentz-Einstein aplicadas al sistema en movimiento, se obtienen las fórmulas (16) y (17) que obtuviera Hertz por otros métodos; con el agregado del factor de corrección relativista γ.

Para que la coincidencia sea completa en las fórmulas (14) bastará primar las siguientes variables:

$$\nabla\times\vec{E}'=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\nabla\times(\vec{H}'\times\vec{u})\right)$$

$$\nabla\times\vec{H}'=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\nabla\times(\vec{E}'\times\vec{u})\right)$$

Con ello los valores de las dos derivadas temporales serán con las mismas variables primadas.

También se verifica la importancia de la teoría de Einstein por el hecho de que las fórmulas electromagnéticas para sistemas en movimiento se deducen de ecuaciones de transformación más generales que se aplican tanto a la Mecánica como al Electromagnetismo.

Es un caso parecido a la ecuación universal de la gravedad de Newton frente a las Leyes de Kepler, que en este caso vienen a ser las ecuaciones de Hertz.

La Ley de la Gravitación Universal de Newton explica, por ejemplo, con una sola ecuación el problema de los tres cuerpos como el caso del Sol-Tierra-Luna, mientras que las tres Leyes de Kepler sólo acertaban con el movimiento satelital.

El sistema de ecuaciones (28) y (28’) tiene una gran importancia para la Electrodinámica. Ellas permiten predecir como serán los campos electromagnéticos a partir de situaciones simples de sistemas en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.

Supongamos un sistema fijo en el cual se tienen solamente cargas eléctricas en reposo, se desea saber qué se observa desde un sistema dinámico con una velocidad uniforme $\vec{V}$ que se desplaza en la dirección del eje x.

En tal caso las cargas Q generan los campos:

$$E_x, E_y, E_z \quad y \quad H_x = H_y = H_z = 0$$

en el sistema fijo.

Utilizando las ecuaciones (28') se obtienen los campos medidos en el sistema móvil.

$$\begin{matrix} H'_x = 0 & E'_x = E_x \\ H'_y = \gamma \dfrac{V}{c} E_z & E'_y = \gamma E_y \end{matrix} \quad \text{y} \quad H'_z = -\gamma \frac{V}{c} E_y \qquad E'_z = \gamma E_z$$