Mecánica Racional

CAPÍTULO 3 Ing. Lino Spagnolo

Cinemática

La Mecánica necesita, para estudiar el movimiento de cuerpos y partículas sometidos a la acción o no de fuerzas internas o externas al sistema considerado, de diversas herramientas matemáticas. Entre ellas ya hemos visto el cálculo vectorial que posibilita el tratamiento de los diferentes campos vectoriales como ser: fuerzas, momentos, desplazamientos, velocidades, aceleraciones, rotaciones, etc.

La siguiente herramienta necesaria es el formalismo matemático que describe el movimiento de un punto material o de un cuerpo. Por punto material debe entenderse un modelo de partícula muy pequeña en relación con la distancia que lo separa de los demás cuerpos del sistema, puede ser grande o pequeña, la cual pueda ubicarse en el espacio por un solo vector posición. Por ser un punto material su orientación en el espacio y su dimensión real no deben ser relevantes para el análisis que se está efectuando. El movimiento de la tierra alrededor del sol, considera la esfera terráquea como un punto material; el movimiento de un auto en la carretera, a los efectos de su velocidad y aceleración, también se asimila al de un punto material. Por el contrario, si se analizara el vuelco de un auto en la carretera, ya no podría tomarse como una partícula pues el giro del vuelco obligaría al análisis de un cuerpo rígido.

La cinemática es precisamente el estudio del movimiento que hace uso de herramientas matemáticas y de los conceptos de espacio y tiempo, sin importarle las fuerzas que lo causan. El vector posición de una partícula se designa por $\vec{r}$, su velocidad instantánea, $\vec{v}$ y su aceleración instantánea $\vec{a}$, que son las tres cantidades físicas fundamentales. Las tres tienen características vectoriales por lo cual siguen todas las leyes que les corresponden enunciadas en los capítulos 1 y 2.

El esquema de movimiento de un punto material puede resumirse en las siguientes categorías:

1.-) Movimiento rectilíneo uniforme y movimiento acelerado.

2.-) Movimiento curvilíneo en diferentes sistemas de coordenadas.

3.-) Movimiento a lo largo de curvas específicas o vinculado.

4.-) Movimiento relativo o movimiento referido a ternas móviles.

En todos los casos no importará la causa que provoque tal movimiento, por ello la cinemática debe considerarse una herramienta geométrica y analítica que permite a la

Mecánica establecer las formas de movimiento que se les imprimen a los cuerpos y a los puntos materiales cuando están sometidos a un sistema de fuerzas.

La cinemática trata con un quinto tipo de movimiento denominado “movimiento rototraslatorio de los cuerpos rígidos”. En este capítulo analizaremos la cinemática del punto material y en el capítulo XX se analizará la cinemática del cuerpo rígido.

1.-) Movimiento en coordenadas cartesianas, uniforme o acelerado

Es el movimiento más sencillo y fácil de comprender y analizar. Si el vector posición se define en función del tiempo como $\vec{r} = \vec{r}(t)$ lo describiremos en coordenadas cartesianas ortogonales, en cuyo caso las ecuaciones paramétricas de la trayectoria serán:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (3\text{-}1)$$

La velocidad instantánea es definida por la derivada temporal:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\vec{k} \qquad (3\text{-}2)$$

También existe la velocidad media en un intervalo de tiempo, llamada $\tilde{v}$:

$$\tilde{v} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad (3\text{-}3)$$

La aceleración instantánea también se define por la derivada temporal de la velocidad instantánea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j} + \ddot{z}(t)\vec{k} \qquad (3\text{-}4)$$

La aceleración instantánea es: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Y la aceleración media es $\tilde{a}$:

$$\tilde{a} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad (3\text{-}5)$$

Si se conoce la ecuación del movimiento de una partícula, $\vec{r}(t)$ en función del tiempo, hallar su velocidad es realizar una simple derivada.

Si se conoce la velocidad de una partícula en función del tiempo, para conocer su desplazamiento se deberá integrar:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t).dt \text{ y si } \vec{v} \text{ es constante: } \vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}_0 \qquad (3\text{-}6)$$

Del mismo modo, si conocemos la aceleración de una partícula en función del tiempo, para conocer su desplazamiento se deberá integrar dos veces:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t).dt \quad \text{ y luego } \vec{r}(t) = \int dt \int \vec{a}(t).dt \qquad (3\text{-}7)$$

y en el caso que $\vec{a}$ es constante: $\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0$ y luego se aplica (3-6)

En el caso de un movimiento rectilíneo:

$$\vec{r}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t).dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{a}.t + \vec{v}_0)dt = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \qquad (3\text{-}8)$$

Si el movimiento es rectilíneo, con aceleración constante, y además en una dirección simple como x, las ecuaciones son:

$$x = s = v_x t + x_0 \qquad \text{también: } x = s = vt + x_0$$

$$v_x = a_x t + v_0 \qquad \text{también: } v = at + v_0$$

$$x = s = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_0 t + x_0 \qquad \text{también: } s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Otra ecuación es: $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

La ecuación del movimiento de una partícula en función del tiempo tiene la notación común de:

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ si es vectorial. $r = s = s(t)$ cuando es escalar. $x = x(t)$ cuando es rectilínea. (O también $y = y(t)$; $z = z(t)$).

Ejemplo:

Un móvil puntual (una camioneta) tiene una velocidad inicial de $v = 30\dfrac{m}{s}$. En ese momento frena moviéndose con aceleración negativa constante hasta detenerse al cabo de $75m$. Hallar la aceleración empleada.

Solución:

Si se emplea la última fórmula, se soluciona el problema:

Dado que $v^2 = 0$ y $v_0^2 = 30^2(\dfrac{m}{s})^2$, se tiene: $a = -\dfrac{30^2}{2\times 75} = -6\dfrac{m}{s^2}$

(Resolver el mismo problema utilizando las otras ecuaciones.)

Problemas 3-1:

a) Se desea acelerar una partícula de forma tal que adquiera una velocidad de $120\frac{Km}{h}$ luego de recorrer $100m$ partiendo desde una posición inicial $x = 0$ y con velocidad nula. (Respuesta: $a = 5,55\frac{m}{s^2}$).

b) Una partícula tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$s(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10\,(m)$$

En el instante $t = 0$ la partícula parte de la posición $s_0 = 10m$ y con una velocidad inicial $v = 3t^2 - 15t + 12\,(\frac{m}{s})$.

Calcular:

a) Para qué valores de t se anula la velocidad.
b) A qué distancias s se producen las anulaciones de v.
c) Qué distancias recorre durante: $1seg$; $2seg$; $4seg$; $6seg$
d) Para qué valor de t se anula la aceleración.

Respuestas: Es ilustrativo representar gráficamente las curvas de s, v, a en función del tiempo.

a) En $t = 1 \;\; y \;\; t = 4$
b) En $s = 15,5m \;\; y \;\; s = 2m$
d-) La aceleración se anula en $t = 2,5seg$

c) Una partícula tiene inicialmente el siguiente vector posición:

$\vec{r} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}\,(m)$ y una aceleración de

$$\vec{a} = 6t\,\hat{i} + 5t^2\,\hat{j} + 10\hat{k}\,(m/s^2)$$

Si parte inicialmente con velocidad nula, ¿cuál será su posición, velocidad y aceleración al cabo de 10 segundos?

Respuestas:

$$\vec{r} = 1000\hat{i} + 4166\hat{j} + 500\hat{k}\,(m)$$
$$\vec{a} = 60\hat{i} + 500\hat{j} + 10\hat{k}\,(m/s^2)$$

Problema 3-2:

Se conoce la velocidad de una partícula en los instantes $t_1 \ y \ t_2$:

$$\begin{cases} En\ t_1 = 2 \quad \vec{v}_1 = 16\hat{i} + 3\hat{j} + 18\hat{k}\ en\ m/s \\ En\ t_2 = 5 \quad \vec{v}_2 = -5\hat{i} + 16\hat{j} \qquad en\ m/s \end{cases}$$

Y para la aceleración se conoce su fórmula como:

$$\vec{a} = pt\,\hat{i} + \frac{q}{t}\hat{j} + r\ln t\,\hat{k} \quad \text{con } p,q,r \text{ constantes.}$$

Determinar la aceleración de la partícula en los instantes $t_1 \ y \ t_2$.

Solución:

La solución de este problema consiste en integrar la aceleración para obtener la expresión de la velocidad, con el fin de hallar las constantes incógnitas p,q,r.

La integración de los vectores sigue la conocida regla de:

$$\int \vec{a}(t)dt = v(t) + \vec{C} \quad \text{donde } \vec{C} \text{ es un vector constante.}$$

También se puede integrar como: $\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$ siendo las dos velocidades datos del problema.

La integral de la aceleración es:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt = \left[\frac{1}{2}pt^2\hat{i} + q\ln t\,\hat{j} + rt(\ln t - 1)\hat{k}\right]_{t_1=2}^{t_2=5}$$

Y la integral debe igualarse a:

$$\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = -21\hat{i} + 13\hat{j} - 18\hat{k} \quad \text{Luego igualando:}$$

$$\hat{i})\frac{1}{2}p(21) = -21\ ;\ \ \hat{j})q(\ln 5 - \ln 2) = 13\ ;\ \hat{k})r(3{,}045 + 0{,}614) = -18$$

Se obtienen los valores de las constantes: $p = -2$; $q = 14{,}18$; $r = -4{,}919$

Que permiten obtener la aceleración en t_1 y t_2. $\vec{a} = pt\,\hat{i} + \dfrac{q}{t}\,\hat{j} + r\ln t\,\hat{k}$

$$\vec{a}_{(t_1=2)} = -4\hat{i} + \frac{14{,}18}{2}\,\hat{j} - 4.919(\ln 2)\hat{k}\,(m/s^2)$$
$$\vec{a}_{(t_1=5)} = -10\hat{i} + \frac{14{,}18}{5}\,\hat{j} - 4.919(\ln 5)\hat{k}\,(m/s^2)$$

Problema 3-3: (A resolver).

Se conoce la posición de una partícula en los instantes t_1 ; t_2 ; t_3:

$$\begin{cases} En\ t_1 = 2 & \vec{r}_1 = 8\hat{i} - 20\hat{j} + 10\hat{k}\ en\ m \\ En\ t_2 = 5 & \vec{r}_2 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}\ \ en\ m \\ En\ t_3 = 10 & \vec{r}_3 = 10\hat{i} + 5\hat{j} - 10\hat{k}\ en\ m \end{cases}$$

Y para la aceleración se conoce su fórmula como:

$\vec{a} = pt\,\hat{i} + qt^2\,\hat{j} + r\ln t\,\hat{k}$ con p, q, r constantes.

Determinar la aceleración de la partícula en los instantes t_2 y t_3.

2.-) Movimiento curvilíneo en diferentes sistemas de coordenadas

Muchos problemas físicos tienen algún tipo de simetría por lo que resulta conveniente, para su análisis, utilizar un sistema de coordenadas con el mismo tipo de simetría.

Tales son los casos de movimientos centrales que requieren un sistema de coordenadas polares para simplificar sus ecuaciones. Lo mismo ocurre con la simetría cilíndrica que requiere de ese sistema de coordenadas, o de la simetría esférica.

Hay tipos de movimientos que se desarrollan sobre o a lo largo de una curva o trayectoria especial; en tales casos es posible recurrir al sistema de coordenadas intrínsecas o sistema de componentes tangenciales y normales.

Coordenadas Cilíndricas y Polares planas

En el Capítulo 1 hemos estudiado cómo se descomponía un vector en ese tipo de coordenadas; para no repetir temas nos referiremos al vector posición como se analizó en ese parágrafo. Las componentes directas e inversas del vector posición eran:

$$x = \rho \cos\theta \quad ; \quad y = \rho \sin\theta \quad ; \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad ; \quad z = z$$

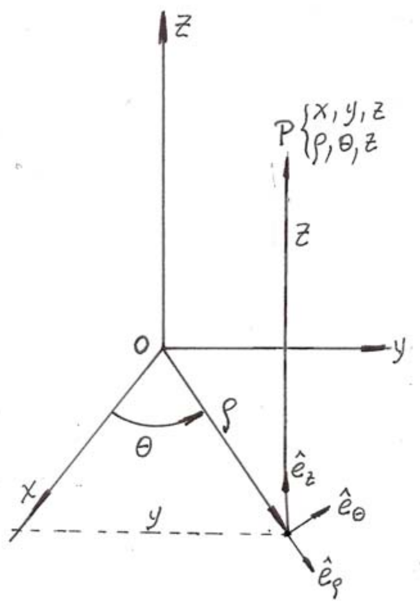
O sea:

$$\boxed{\vec{r} = \rho \cos\theta \, \hat{e}_\rho + \rho \sin\theta \, \hat{e}_\theta + z\,\hat{e}_z} \qquad (3\text{-}9)$$

para las coordenadas cilíndricas. Y el vector

$$\boxed{\vec{r} = \rho \cos\theta \, \hat{e}_\rho + \rho \sin\theta \, \hat{e}_\theta} \qquad (3\text{-}10)$$

para las coordenadas polares en el plano.



Si el vector posición es variable en función del tiempo, podemos hallar sus componentes de velocidad y aceleración derivándolo con respecto al tiempo.

Como se vio en el Capítulo 1, el vector posición en coordenadas cilíndricas, era:

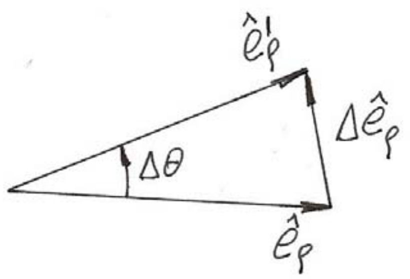
$$\vec{r} = \overline{OP} = \rho\,\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$$

Su derivada temporal:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} + \dot{z}\hat{e}_z + z\frac{d\hat{e}_z}{dt} \qquad (3\text{-}11)$$

Cuando el vector posición pasa de la posición P a otra próxima $P + \Delta P$, las tres componentes varían y también lo hace el versor $\hat{e}_\rho$ que rota a una nueva posición $\hat{e}_\rho'$ en la cual el versor tiene el mismo módulo pero cambió su posición.

Tal como se ve en la figura, al rotar $\hat{e}_\rho$ en un ángulo $\Delta\theta$ da origen a un vector $\Delta\hat{e}_\rho$ que al



pasar al límite para un $\Delta t \to \Delta\theta \to 0$ nos define la derivada:

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \frac{d\hat{e}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\rho}{d\theta} \qquad (3\text{-}12)$$

Y donde el límite del cociente (cuerda/ángulo natural) $\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{\Delta\hat{e}_\rho}{\Delta\theta} \to \hat{e}_\theta$ es un versor de módulo unitario, y con la dirección del versor normal a $\hat{e}_\delta$ que es precisamente $\hat{e}_\theta$; por lo cual esa derivada es $\frac{d\hat{e}_\rho}{d\theta} = \hat{e}_\theta$.

La otra derivada, del versor $\hat{e}_z$, al variar la posición de P, consiste en un desplazamiento de dicho versor a lo largo de z, por lo tanto su derivada es el mismo versor $\hat{e}_z$.

Así la velocidad en cilíndricas será: $\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z}$ (3-13)

Mientras que en coordenadas polares será: $\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{e}_\theta}$ (3-14)

Las componentes de la velocidad se llaman respectivamente: radial, transversal y vertical. En el caso del movimiento plano sólo hay componente **radial y transversal**. Estas fórmulas pueden verificarse derivando las (3-9) o las (3-10) y expresando sus valores en las coordenadas cilíndricas o polares.

Para la aceleración se derivará la velocidad y con razonamientos como los anteriores acerca de las derivadas de los versores, se obtiene:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\hat{e}_z$$

Cilíndricas: $\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z}$ (3-15)

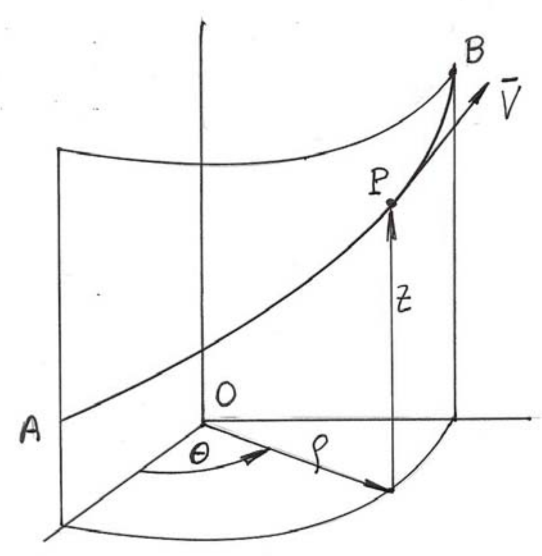
Polares: $\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{e}_\theta}$ (3-16)

Problema 3-4:

Un punto material se mueve a lo largo de la hélice cilíndrica $A-B$ en el sentido creciente del ángulo θ. Su aceleración angular es $\gamma = 5t$ y su movimiento vertical es $z = 4 + 3t^2$, siendo $\rho = 8cm$ el radio del cilindro.
Hallar su velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas y sus valores particulares luego de $t = 4seg.$

Solución:

Las características del movimiento descripto en el problema implican que el radio del cilindro $\vec{\rho}$ sea de módulo constante y que la aceleración angular sea $\gamma = \ddot{\theta} = 5t$.



La velocidad se obtiene con la fórmula:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z$$

Donde: $\dot{\rho} = 0$; $\dot{\theta} = \int_0^t \ddot{\theta}.dt = \frac{5}{2}t^2$

$\therefore \vec{v} = 20t^2\hat{e}_\theta + 6t\,\hat{e}_z$

En el instante $t = 4seg.$, punto P la velocidad es: $\vec{v} = 320\hat{e}_\theta + 24\hat{e}_z (\frac{cm}{s})$

Para la aceleración, usaremos: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z$

Cuyos valores, al derivar, son: $\vec{a} = (-50t^4)\hat{e}_\rho + (40t)\hat{e}_\theta + 6\hat{e}_z (\frac{cm}{s^2})$

Y a los $4seg$, la aceleración es: $\vec{a} = -256\hat{e}_\rho + 160\hat{e}_\theta + 6\hat{e}_z (\frac{cm}{s^2})$

Problema 3-5:

Una partícula se mueve sobre una elipse cuyas ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 5\cos\, t \end{cases}$ sin considerar las unidades. Hallar su velocidad y aceleración en coordenadas polares para un instante cualquiera y para un tiempo $t = 0,7$

Solución:

Dado que las ecuaciones paramétricas anteriores no están en coordenadas polares, para resolver el problema en las componentes polares deberemos plantear las relaciones entre las coordenadas cartesianas y las polares.

En el problema propuesto, podemos expresar a ρ en función de $x_{(t)}$ e $y_{(t)}$ como: $\vec{\rho} = x_{(t)}\, \hat{i} + y_{(t)}\, \hat{j}$ y en consecuencia su módulo será:

$$\rho = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

y luego hallar su derivada para obtener la velocidad en coordenadas polares cuya fórmula general es:

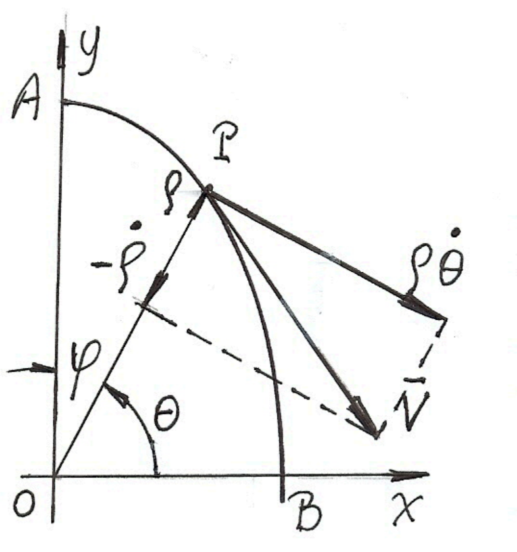
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

La velocidad radial $\dot{\rho}\hat{e}_\delta$ vale:

$$\rho = \sqrt{9\sin^2 t + 25\cos^2 t}$$

$$\therefore \ \dot{\rho} = \frac{-32\sin t\cos t}{2\sqrt{9\sin^2 t + 25\cos^2 t}}$$

Que para $t = 0,7$ da: $\rho = 4,28$
y $\dot{\rho} = -1,84$



El movimiento sobre la elipse comienza en el punto A, pasa por el punto P en que el parámetro $t = 0,7$ y termina en B

Para las coordenadas polares el ángulo θ debe ser creciente, mientras que en este movimiento ese ángulo decrece, dado que el movimiento comienza en A, por lo cual su velocidad angular de "decrecimiento", o sea $\dot{\theta}$, debe tomarse negativa.

Para hallar la velocidad transversal: $\rho\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ debemos saber cómo varía el ángulo con el tiempo. La relación del ángulo θ con las coordenadas x, y está dado por la relación:

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ Con $u = \dfrac{y}{x}$, su derivada con el tiempo es: $\dfrac{d}{dt}(\tan^{-1}u) = \dfrac{\dot{u}}{1+u^2}$

Por lo tanto se tiene $\dfrac{d}{dt}(\tan^{-1}(\dfrac{y}{x})) = \dfrac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2+y^2} = \dfrac{-15(\sin^2 t+\cos^2 t)}{\rho^2}$

Tomando como negativa a $\dot{\theta}$, su valor será: $\boxed{\dot{\theta} = \dfrac{15}{\rho^2}}$ y para $t = 0,7$ $\dot{\theta} = \dfrac{15}{4,28^2}$

Reemplazando en la velocidad: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{e}_\theta$; $\boxed{\vec{v} = -1,84\hat{e}_\rho + 3,5\hat{e}_\theta}$

Y cuyo módulo es: $|\vec{v}| = 3,95$

<u>Cálculo de la aceleración:</u> Su valor es: $\vec{a} = (\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\hat{e}_\theta$

Partiendo de los valores antes obtenidos: $\dot{\rho} = \dfrac{-32\sin t\cos t}{2\rho}$; $\dot{\theta} = \dfrac{15}{\rho^2}$

Calcularemos las demás derivadas:

$$\rho\dot{\theta}^2 = \frac{15^2}{\rho^3}\ ;\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} = \frac{-32\times15\sin t\cos t}{\rho^3}\ ;\ \rho\ddot{\theta} = \frac{30\times16\sin t\cos t}{\rho^3}$$

$$\ddot{\rho} = -\frac{16\rho(\cos^2 t-\sin^2 t)}{\rho^2} - \frac{16^2(\sin t\cos t)^2}{\rho^3}$$

Reemplazando para $t = 0,7$:

$$\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2 = -1,41-2,87 = -4,28$$
$$2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta} = 0$$

$\therefore$ $\boxed{\vec{a} = -4,28\hat{e}_\rho}$

Problemas propuestos

$1.-$ Una partícula se mueve en un plano y las ecuaciones del movimiento o de su trayectoria son: $\begin{cases} \rho = h\cos\omega t \\ \theta = \omega t \end{cases}$ Obtener las componentes de su velocidad y aceleración en coordenadas polares. Verificar que el movimiento es circular uniforme.

$2.-$ Una partícula se mueve en un plano y las ecuaciones del movimiento o de su trayectoria son: $\begin{cases} \rho = at^3 \\ \theta = \dfrac{1}{2}bt^2 \end{cases}$ Obtener las componentes de su velocidad y aceleración en coordenadas polares.

$3.-$ Hallar la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano $x-y$ con velocidad de componentes cartesianas $V_x = ky$; $V_y = kx$. Si inicialmente la partícula se encuentra en la posición $\vec{r}_0 = \alpha\,\hat{i}$, calcular el tiempo que tarda en alcanzar una posición genérica $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$. Usar un sistema de coordenadas apropiado.

$4.-$ El movimiento de una partícula sobre una circunferencia de radio R viene dado por las ecuaciones: $\begin{cases} x = R\sin\omega t \\ y = R\cos\omega t \end{cases}$ Obtener las componentes de su velocidad y aceleración en coordenadas polares.

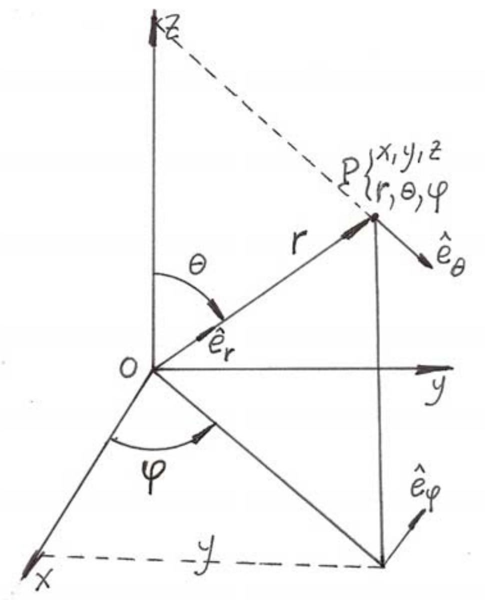
Componentes esféricas de velocidad y aceleración

Las componentes directas e inversas del vector posición eran:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$z = r\cos\theta \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$



Para convertir la distancia $\vec{r} = \overline{OP}$ a las coordenadas cartesianas, se proyecta sobre los tres ejes:

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k} \qquad (3\text{-}17)$$

Si el vector posición es variable en función del tiempo, podemos hallar sus componentes de velocidad y aceleración derivándolo con respecto al tiempo.

Ahora, el vector posición en coordenadas esféricas, viene dado por la fórmula:

$$\vec{r} = \overline{OP} = r\,\hat{e}_r \qquad (3\text{-}18)$$

Cuando el punto P se desplaza en una magnitud elemental hasta $P + \Delta P$ intervienen tres tipos de desplazamientos posibles: uno en el sentido del vector posición, es decir en la dirección dada por el versor $\hat{e}_r = \dfrac{\partial\vec{r}/\partial r}{\left|\partial\vec{r}/\partial r\right|}$

Otra en el sentido de la colatitud, cuando varía el ángulo θ que el vector posición forma con el eje z, dirección dada por el versor $\hat{e}_\theta = \dfrac{\partial\vec{r}/\partial\theta}{\left|\partial\vec{r}/\partial\theta\right|}$

Y el último, en el sentido de la longitud, cuando varía el ángulo φ, que es el ángulo que forma la proyección del vector posición sobre el plano $x - y$ con el eje x, o sea, la dirección dada por el versor $\vec{e}_\varphi = \dfrac{\partial\vec{r}/\partial\varphi}{\left|\partial\vec{r}/\partial\varphi\right|}$.

La velocidad de desplazamiento de un punto P viene dada por la derivada temporal de

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r :$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} \quad (3\text{-}19)$$

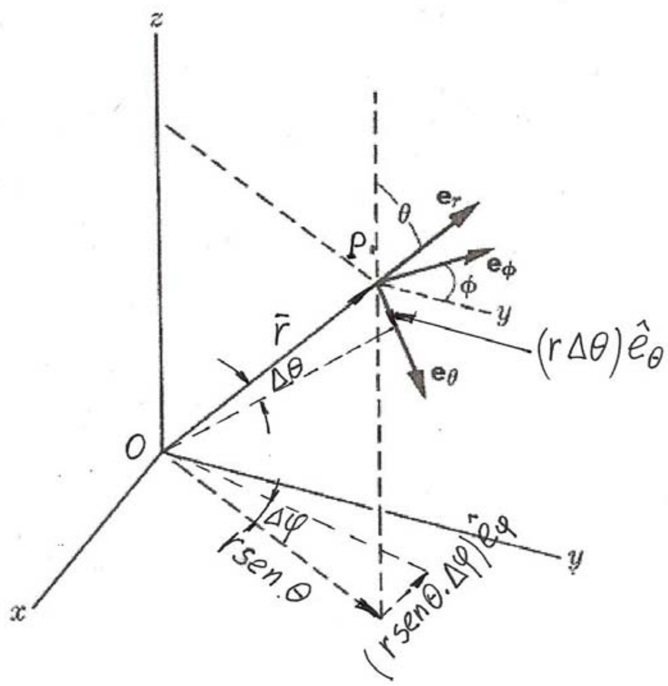
Donde la derivada del versor $\hat{e}_r$ tiene tres direcciones posibles de variación $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ y $\hat{e}_\varphi$.

El desplazamiento del vector posición $\Delta\vec{r}$ es la suma de los desplazamientos:

$\Delta\vec{r}_1 = \Delta r\,\hat{e}_r$

$\Delta\vec{r}_2 = r\Delta\theta\,\hat{e}_\theta$ sentido de $\hat{e}_\theta$

$\Delta\vec{r}_3 = (r\sin\theta\Delta\varphi)\hat{e}_\varphi$ en $\hat{e}_\varphi$.



En consecuencia el desplazamiento total será la suma:

$$\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3 = \Delta r\,\hat{e}_r + r\Delta\theta\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta\,\Delta\varphi\,\hat{e}_\varphi$$

Si se divide todo por Δt y lo hacemos tender a cero, obtenemos la expresión de la derivada, o sea, la velocidad del punto P :

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi} \qquad (3\text{-}20)$$

Una forma más analítica para llegar a la fórmula anterior, es considerar al vector posición como:

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + r\cos\theta\hat{k}$$

y luego hallar: $\hat{e}_r = \dfrac{\partial\vec{r}/\partial r}{\left|\partial\vec{r}/\partial r\right|} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$ (3-21)

a continuación hallar: $\dfrac{d\hat{e}_r}{dt} = \begin{cases} (-\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi} + \cos\theta\cos\varphi\dot{\theta})\hat{i} + \\ +(\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi} + \cos\theta\sin\varphi\dot{\theta})\,\hat{j} - \\ -\sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{k} \end{cases}$ (3-22)

Verificando que equivale a:

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$$

Que al reemplazar en $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dfrac{d\hat{e}_r}{dt}$ obtenemos nuevamente (3-20).

Para la aceleración se derivará la velocidad y con razonamientos como los anteriores acerca de las derivadas de los versores, sobre todo teniendo en cuenta las fórmulas (3-21), (3-22) y (3-23):

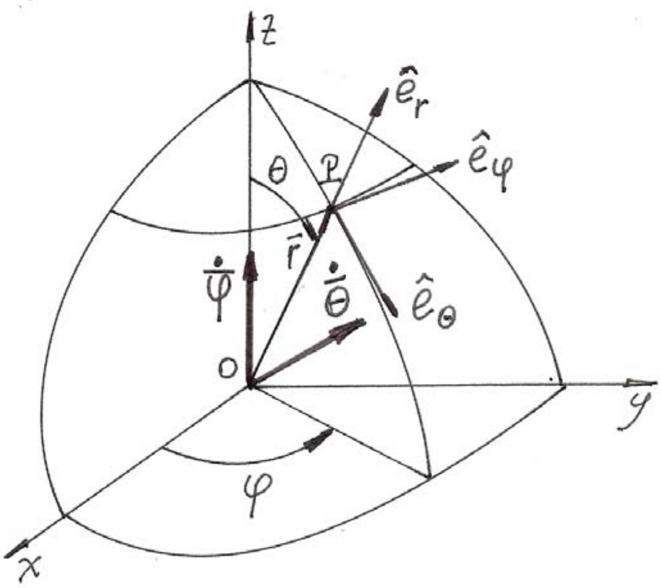
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi)$$

$$\hat{e}_\theta = \frac{\partial\vec{r}/\partial\theta}{\left|\partial\vec{r}/\partial\theta\right|} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{j} - \sin\theta\hat{k} \qquad (3\text{-}23)$$

$$\hat{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}/\partial\varphi}{\left|\partial\vec{r}/\partial\varphi\right|} = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} \qquad (3\text{-}24)$$

Se obtiene: $$\vec{a} = \begin{cases} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin\theta\,\dot{\varphi}^2)\,\hat{e}_r + \\ +(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2)\,\hat{e}_\theta + \\ +(r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})\,\hat{e}_\varphi \end{cases} \qquad (3\text{-}25)$$

Si el punto P se desplaza sobre un paralelo de la esfera a radio constante, un movimiento elemental es una rotación alrededor del eje z. En la figura adjunta se observa que al rotar un ángulo $\Delta\varphi$ lo hará alrededor del eje z y su velocidad angular será $\dot{\vec{\varphi}}$ en la dirección de z o del versor $\hat{k}$.



De la misma forma, si rota un ángulo elemental $\Delta\theta$ sobre un meridiano lo hará alrededor del versor $\hat{e}_\varphi$ y con una velocidad angular $\dot{\vec{\theta}}$.

Si sumamos las dos velocidades angulares obtenemos el vector velocidad angular total:

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}} + \dot{\vec{\theta}} = \dot{\varphi}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{e}_\varphi = \dot{\varphi}(\cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta) + \dot{\theta}\hat{e}_\varphi \qquad (3\text{-}26)$$

O también: $$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}} + \dot{\vec{\theta}} = \dot{\varphi}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{e}_\varphi = \dot{\varphi}\hat{k} + \dot{\theta}(-\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}) \qquad (3\text{-}27)$$

según la fórmula (3-23).

En función de la velocidad angular $\vec{\omega}$, que representa la velocidad de rotación de la terna móvil $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi$ sobre la superficie de la esfera, se pueden obtener las siguientes relaciones, conocidas como fórmulas de Poisson:

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_r = \vec{\omega} \times \hat{e}_r \\ \dot{\hat{e}}_\theta = \vec{\omega} \times \hat{e}_\theta \\ \dot{\hat{e}}_\varphi = \vec{\omega} \times \hat{e}_\varphi \end{cases} \qquad (3\text{-}28)$$

Que expresan muy sencillamente la velocidad de rotación del versor en función de la velocidad angular del triedro y del mismo versor.

Problema 3-6:

Un observador sobre la superficie terrestre, con vector posición $\vec{r}_0$, ubicado en el instante $t = 0$ en el punto P de colatitud θ_0 y longitud φ_0, observa que un avión levanta vuelo hacía la dirección noreste y mide que la altura sobre el nivel del suelo que va adquiriendo el avión crece según la fórmula:

$$h = 5t^2 e^{-t} \text{ en metros.}$$

Observa, además, que se aleja en sentido del paralelo según la ecuación:

$$\varphi = 5t$$

y en sentido del meridiano según la fórmula $\theta = -2t$.

Se pide calcular la velocidad y la aceleración del avión.

Solución:

Eligiendo un sistema de coordenadas esféricas ubicadas en el punto del observador, las ecuaciones a considerar son:

$$\begin{cases} r = 5t^2 e^{-t} \\ \theta = -2t \\ \varphi = 5t \end{cases}$$

Por lo cual, utilizando la
velocidad en coordenadas esféricas: $\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$

Derivando se obtiene:

$$\vec{v} = [(10t - 5t^2)e^{-t}]\hat{e}_r - [10t^2 e^{-t}]\hat{e}_\theta + [25t^2 e^{-t}\sin(-2t)]\hat{e}_\varphi$$

Luego, derivando nuevamente, se obtiene la aceleración, con la fórmula general:

$$\vec{a} = \begin{cases} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin\theta\,\dot{\varphi}^2)\,\hat{e}_r + \\ +(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2)\,\hat{e}_\theta + \\ +(r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})\,\hat{e}_\varphi \end{cases}$$

$$a_r = [(10 - 20t + 5t^2) - 20t^2 - 125t^2\sin(-2t)]e^{-t}$$

$$a_\theta = [-4(10t - 5t^2) + 25(10t - 5t^2)\sin(-2t)\cos(-2t)]e^{-t}$$

$$a_\varphi = [10(10t - 5t^2)\sin(-2t) - 20(5t^2)\cos(-2t)]e^{-t}$$

Problema 3-7:

Una partícula está obligada a moverse en un plano de colatitud constante $\theta = Cte.$ en un entorno definido en coordenadas esféricas, el cual puede corresponder a un movimiento sobre la superficie terrestre.

Además debe cumplir con la condición de velocidades: $\dfrac{V_r}{V_\varphi} = Cte.$

Estudiar qué tipo de movimiento posible le corresponde.

Solución:

Dado que: $\dfrac{V_r}{V_\varphi} = \dfrac{\dot{r}}{r\dot{\varphi}\sin\theta} = C$ Integrando: $\int \dfrac{dr}{r} = C\sin\theta \int d\varphi$

Se obtiene: $\ln r = C\sin\theta.\varphi \rightarrow r = e^{C\sin\theta.\varphi} = e^{C_1.\varphi}$

Que es una espiral logarítmica en el plano de colatitud θ normal al eje z.

Problema propuesto:

Ídem al caso anterior pero ahora las condiciones que debe cumplir el movimiento de la partícula son:

$$r = Cte. \quad y \quad \frac{V_\varphi}{V_\theta} = Cte.$$

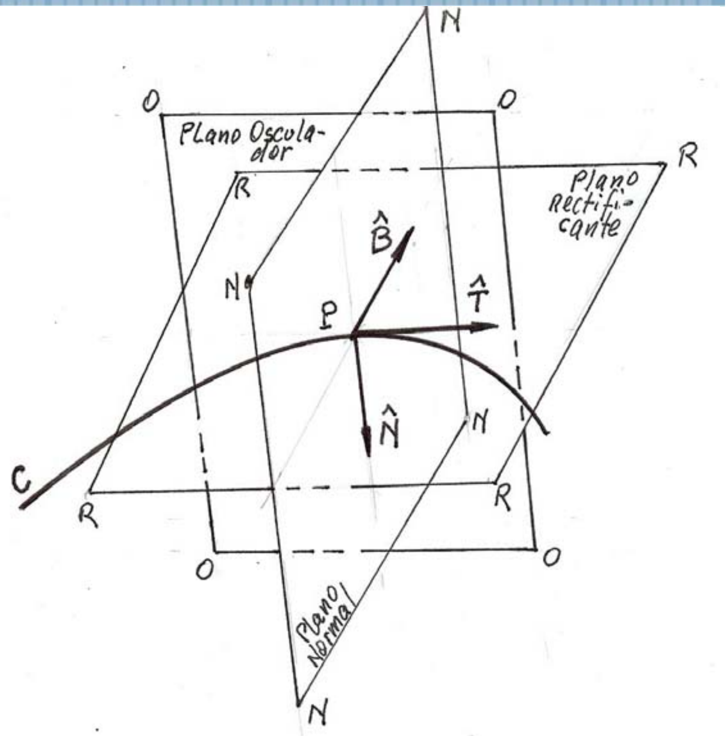
Hallar el tipo de movimiento posible.

3.-) Movimiento a lo largo de curvas específicas o mov. vinculado.

Es frecuente que una partícula se mueva a lo largo de una trayectoria especial. Si esa trayectoria es una recta, el movimiento es rectilíneo y en tal caso ya se han visto las reglas de su análisis.

Pero es frecuente también que la trayectoria sea una circunferencia, una parábola, una elipse, etc. En tales casos una técnica de estudio posible es el uso de un sistema de coordenadas que se mueven a lo largo de la trayectoria, como vimos en el caso de la rotación del triedro $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi$ sobre la superficie de la esfera.

Tal triedro es conocido como triedro intrínseco o de Frenet, siendo sus versores unitarios y ortogonales, o sea, ortonormales.
Si C representa una curva cualquiera en el espacio tridimensional, el triedro está formado por un versor tangente $\hat{T}$ a la curva, un versor normal $\hat{N}$ en el plano osculador y normal al versor tangente y un versor $\hat{B}$ binormal, que resulta ser normal al plano formado por los vectores tangente y normal (plano osculador).



En geometría analítica se demuestra que los versores tangente, normal y binormal, resultan de la intersección de los siguientes planos y la curva C:

Tangente $\hat{T}$: intersección del plano osculador y el plano rectificante y es normal al plano normal. Tangente a la curva C.

Normal $\hat{N}$: intersección del plano osculador y el plano normal y es normal al plano rectificante. Normal principal a la tangente $\hat{T}$ y contenida en el plano osculador.

Binormal $\hat{B}$: intersección del plano normal y el plano rectificante y es normal al plano osculador. Normal a la tangente $\hat{T}$ y a la normal principal.

En la cinemática, el estudio del movimiento sobre una curva puede realizarse en forma paramétrica. **El parámetro utilizado es la distancia s medida sobre la curva**, entre la posición actual de la partícula y un origen fijo elegido a conveniencia, también sobre la curva.

Luego las ecuaciones paramétricas de la tryectoria son:

$$x = x(s)\ ;\ \ y = y(s)\ ;\ \ z = z(s)$$

$$\vec{r}(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j} + z(s)\hat{k}$$

La velocidad en el triedro cartesiano es definida como:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \dot{s}\frac{dx}{ds}\hat{i} + \dot{s}\frac{dy}{ds}\hat{j} + \dot{s}\frac{dz}{ds}\hat{k} = \dot{s}\left(\frac{dx}{ds}\hat{i} + \frac{dy}{ds}\hat{j} + \frac{dz}{ds}\hat{k}\right) \qquad (3\text{-}29)$$

Precisamente, en geometría analítica se demuestra que la suma de las derivadas

$$\hat{T} = \left(\frac{dx}{ds}\hat{i} + \frac{dy}{ds}\hat{j} + \frac{dz}{ds}\hat{k}\right) \qquad (3\text{-}30)$$

forma la expresión del versor tangente a la curva, de lo cual la cinemática aprovecha para formalizar la expresión simple de la velocidad de una partícula como:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{s}\hat{T}} \qquad (3\text{-}31)$$

La fórmula encierra una notable propiedad de la velocidad que no resaltaba en otros sistemas de coordenadas: **El vector velocidad de una partícula es siempre tangente a su trayectoria** y su módulo es la derivada de la función distancia $s(t)$ respecto al tiempo. Por tal motivo este sistema de coordenadas se llama también **“sistema natural”** de coordenadas (para la física).

Otras fórmulas relativas a la velocidad son.

Referidas a la terna cartesiana, se tiene: $\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ (3-32)

$$v^2 = \dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{\left|d\vec{r}/dt\right|} = \frac{d\vec{r}/dt}{\dot{s}} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{s}} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \qquad (3\text{-}33)$$

Si el parámetro s en lugar de ser una distancia (un elemento de arco) fuese otro valor, por ejemplo un ángulo, el versor tangente sería:

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/d\varphi}{\left|ds/d\varphi\right|}$$

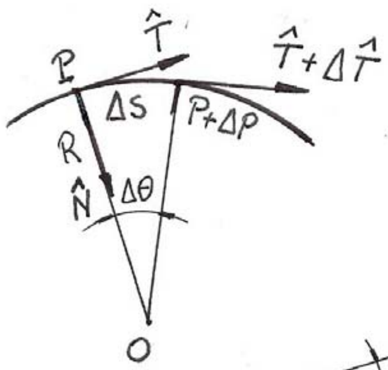
La aceleración se calcula derivando la velocidad.

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\hat{T}) = \ddot{s}\hat{T} + \dot{s}\frac{d\hat{T}}{dt} \qquad (3\text{-}34)$$

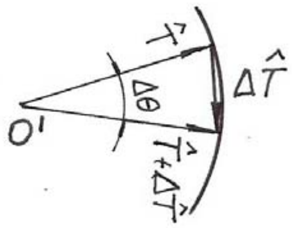
Nuevamente se pone de relieve la simplicidad de la expresión del vector aceleración, como suma de solamente dos componentes.

Consideremos la derivada $\dfrac{d\hat{T}}{dt} = \dfrac{d\hat{T}}{ds}\dot{s}$ sobre la trayectoria y tomemos un elemento de ella en la cual nos desplazamos desde $P \ a \ P + \Delta P$ con un diferencial de ángulo $\Delta\theta$, en el punto P tenemos el versor tangente $\hat{T}$, el versor normal $\hat{N}$ y el radio de curvatura de la trayectoria, que llamaremos R. Para llegar al punto $P + \Delta P$ se recorre el trayecto Δs y allí se tiene un nuevo versor tangente $\hat{T} + \Delta\hat{T}$ de módulo unitario pero girado respecto al versor origen $\hat{T}$.

Formando ahora dos triángulos elementales con $O, P \ y \, (P + \Delta P)$, y otro con $O', \hat{T} \ y \ (\hat{T} + \Delta\hat{T})$, se puede establecer una relación de igualdad entre ambos por tener el mismo ángulo $\Delta\theta$.



$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\left|\Delta\hat{T}\right|}{\left|\hat{T}\right|} \rightarrow \frac{\left|\Delta\hat{T}\right|}{\Delta s} = \frac{1}{R}\left|\hat{T}\right|$$



Haciendo tender Δs a cero, el módulo de $\hat{T}$ es unitario y el $\Delta\hat{T}$ tiene la dirección de la normal en el punto P.

Con lo cual la derivada se convierte en: $\dfrac{d\hat{T}}{dt} = \dfrac{d\hat{T}}{ds}\dot{s} = \dfrac{1}{R}\dot{s}\hat{N}$ (3-35)

Reemplazando en (3-34) se obtiene

la fórmula de la aceleración: $\boxed{\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\dot{s}\hat{T}) = \ddot{s}\hat{T} + \dfrac{1}{R}\dot{s}^2\hat{N}}$ (3-36)

R es el radio de curvatura de la trayectoria en cada punto de la misma y $\dfrac{1}{R}$ es la llamada curvatura de flexión o primera curvatura.

Las dos componentes de la aceleración se llaman:

$\ddot{s}\hat{T}$ es la **aceleración tangencial** o lineal.

$\frac{v^2}{R}\hat{N}$ es la **aceleración normal** o centrípeta.

El valor de *la curvatura principal o de flexión* se obtiene de considerar las fórmulas:

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = \frac{1}{\dot{s}}\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|$$

Mientras que el versor $\hat{N}$ puede calcularse (de (3-35)) con: $\hat{N} = \frac{R}{\dot{s}}\frac{d\hat{T}}{dt}$

Otras fórmulas relativas a la aceleración y a los versores $\hat{N}$ y $\hat{B}$ son.

Valor de la curvatura de flexión: El producto vectorial

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (v\hat{T}) \times (\dot{v}\hat{T} + \frac{v^2}{R}\hat{N}) = \frac{v^3}{R}\hat{B}$$

Tomando el módulo del producto vectorial y despejando:

$$\frac{1}{R} = \frac{\left|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right|}{v^3} = \frac{\left|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right|}{\dot{s}^3} \qquad (3\text{-}37)$$

Si el movimiento ocurre en un plano, la velocidad, aceleración y la curvatura vienen dadas por:

$$v^2 = \dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \;\; ; \;\; a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\left|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \qquad (3\text{-}38)$$

Si la curva en el plano viene dada en la forma usual de las ecuaciones explícitas:

$$y = f(x) \;\rightarrow\; \frac{1}{R} = \frac{\left|y''\right|}{(1 + y'^2)^{3/2}} \qquad (3\text{-}39)$$

Además, al ser una curva plana, el versor binormal es nulo, por lo tanto se puede poner:

$$\hat{T} \cdot \hat{N} = 0 \;\text{ y como }\; \hat{T} = T_x\hat{i} + T_y\hat{j} \quad y \quad \hat{N} = N_x\hat{i} + N_y\hat{j}$$

Se pueden calcular: $T_xN_x + T_yN_y = 0$ por lo cual $\hat{N} = [(-\frac{T_y}{T_x})\hat{i} + \hat{j}]N_y$

Como debe cumplirse que: $(\frac{T_y}{T_x}N_y)^2 + (N_y)^2 = 1 \;\therefore\; N_y = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{T_y}{T_x})^2}}$

Finalmente se tiene una expresión simplificada para el versor normal.

$$\hat{N} = \frac{(-\frac{T_y}{T_x})\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{1+(\frac{T_y}{T_x})^2}} \qquad (3\text{-}40)$$

Para curvas en el espacio en que existe un versor binormal, la ecuación del versor normal se obtiene de la expresión:

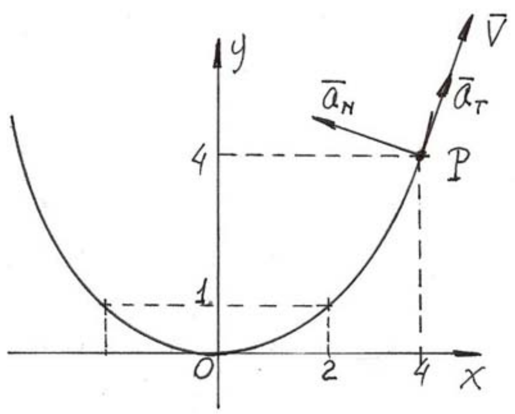
$$\hat{N} = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right| \cdot \dot{s}} \qquad (3\text{-}40)'$$

Los versores del triedro intrínseco cumplen entre sí las condiciones:

$$\hat{T} \times \hat{N} = \hat{B} \; ; \; \hat{N} \times \hat{B} = \hat{T} \; ; \; \hat{B} \times \hat{T} = \hat{N} \qquad (3\text{-}41)$$

Problema 3-8:

Una partícula se mueve a lo largo de una parábola de ecuación $y = \frac{1}{4}x^2$. Cuando la partícula está en el punto $P(4,4)$ su velocidad es de $10\frac{m}{s}$ y su aceleración tangencial es de $10\frac{m}{s^2}$. Hallar la aceleración total en el mismo punto.



Solución:

La fórmula de la aceleración es $\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \ddot{s}\hat{T} + \frac{1}{R}\dot{s}^2\hat{N}$ de la cual desconocemos el radio de curvatura. Además, dado que la curva está en coordenadas cartesianas, también nos interesará conocer las pendientes del versor tangente $\hat{T}$ y del versor normal $\hat{N}$.

La curvatura de la parábola, por ser una curva plana y dada su ecuación en forma explícita, nos permite usar la fórmula: $y = f(x) \rightarrow \frac{1}{R} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ y como

$$y = \frac{1}{4}x^2 \rightarrow y' = \frac{1}{2}x \rightarrow y'' = \frac{1}{2}$$

Reemplazando en $x = 4$ hallamos $y' = 2$ y $\therefore \frac{1}{R} = \frac{1}{22,36} = 0,0447$

La aceleración normal: $a_N = \frac{v^2}{R} = 4,47\frac{m}{s^2}$

Asímismo la aceleración total: $\boxed{\vec{a} = 10\hat{T} + 4,47\hat{N}\,(\frac{m}{s^2})}$

El versor tangente en P se halla con la tangente en ese punto:

$$\tan\alpha = y'_P = \frac{1}{2}x \quad para\ x = 2 \ \therefore\ \tan\alpha = 63,43^{o}$$

Y como $\hat{T} = \cos\alpha\,\hat{i} + \sin\alpha\,\hat{j} \ \rightarrow\ \hat{T} = 0,447\,\hat{i} + 0,894\,\hat{j}$

Por otra parte, el versor $\hat{N}$ por ser normal al $\hat{T}$,

$$\hat{N} = -\sin\alpha\,\hat{i} + \cos\alpha\,\hat{j} = -0,894\,\hat{i} + 0,447\,\hat{j}$$

Y la aceleración total será: $\vec{a} = 0,47\,\hat{i} + 10,94\,\hat{j}\,(\frac{m}{s^2})$

Problema 3-9:

Un punto material se mueve sobre una hélice cilíndrica cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = 3\sin\theta \ ;\ y = 3\cos\theta \ ;\ z = 4\theta \ ;\ \theta = 2t^2$$

Hallar, en la terna intrínseca los siguiente valores para $t = 3$.

Velocidad - Aceleración - Los versores $\hat{T}\ y\ \hat{N}$ - El radio de curvatura.

Solución: Obsérvese que ahora el parámetro s de la distancia sobre la curva, es reemplazado por el ángulo θ que produce igualmente un desplazamiento $s = \theta\delta$ siendo δ el radio del cilindro.

El vector posición es:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 3\sin\theta\,\hat{i} + 3\cos\theta\,\hat{j} + 4\theta\hat{k} \quad con\ \theta = 2t^2$$

Y, según la definición de velocidad, se tiene:

$$\vec{v} = \dot{s}\hat{T} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ \hat{T}$$

$$\vec{v} = \dot{s}\hat{T} = \sqrt{(12t\cos\theta)^2 + (-12t\sin\theta)^2 + (16t)^2}\ \hat{T} = 20\,t\,\hat{T}$$

Para $t=3\ \ y\ \ \theta=2t^2$ el cálculo da: $\boxed{\vec{v}=\dot{s}\hat{T}=60\hat{T}}$

Además se puede calcular la dirección de $\hat{T}$:

$$\hat{T}=\frac{\frac{dx}{d\theta}\hat{i}+\frac{dy}{d\theta}\hat{j}+\frac{dz}{d\theta}\hat{k}}{\left|\frac{dx}{d\theta}\hat{i}+\frac{dy}{d\theta}\hat{j}+\frac{dz}{d\theta}\hat{k}\right|}=\frac{3}{5}\cos\theta\hat{i}-\frac{3}{5}\sin\theta\hat{j}+\frac{4}{5}\hat{k}$$

Y para el instante $t=3$ $\quad\hat{T}=0,396\hat{i}+0,45\hat{j}+0,8\hat{k}$

$$\vec{v}=60\hat{T}=23,77\hat{i}+27,03\hat{j}+48\hat{k}\ \rightarrow v=\dot{s}=60$$

Para la aceleración:

$$\vec{a}=\frac{d\dot{s}}{dt}\hat{T}+\frac{v^2}{R}\hat{N}=20\hat{T}+\frac{(20.t)^2}{R}\hat{N}$$

Nos falta conocer la curvatura y el versor $\hat{N}$.

La curvatura se halla con:

$$\frac{1}{R}=\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|=\frac{1}{\dot{s}}\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|=\frac{1}{20.t}\left|-\frac{3}{5}\sin\theta.4t\,\hat{i}-\frac{3}{5}\cos\theta.4t\,\hat{j}\right|=$$

$$\frac{1}{R}=\frac{3/5.4.t}{20.t}=\frac{3}{25}$$

Mientras que el versor $\hat{N}$ se calcula como: $\hat{N}=\frac{R}{\dot{s}}\frac{d\hat{T}}{dt}$

$$\hat{N}=\frac{25}{3.20.t}\left(-\frac{12.t}{5}\sin\theta\hat{i}-\frac{12.t}{5}\cos\theta\,\hat{j}\right)=-\sin\theta\,\hat{i}-\cos\theta\,\hat{j}$$

Y la aceleración será: $\boxed{\vec{a}=\dot{v}\hat{T}+\frac{v^2}{R}\hat{N}=20\hat{T}+48.t^2\hat{N}}$

Reemplazando las direcciones de $\hat{T}\ \ y\ \ \hat{N}$ para $t=3$ se tiene:

$$\vec{a}=20(0,396\hat{i}+0,45\hat{j}+0,8\hat{k})+48\times9(0,75\hat{i}-0,66\hat{j})$$

$$\vec{a} = 332\hat{i} - 276\,\hat{j} + 16\hat{k}$$

Problema 3-10: (Repetir el problema 3-5 en coordenadas intrínsecas).

Una partícula se mueve sobre una elipse cuyas ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 5\cos\, t \end{cases}$ sin considerar las unidades. Hallar su velocidad y aceleración en coordenadas intrínsecas para un instante cualquiera y para un tiempo $t = 0,7$

Solución:

El vector posición es $\vec{r} = 3\sin t\,\hat{i} + 5\cos t\,\hat{j}$

Y la velocidad es definida por $\vec{v} = \dot{s}\hat{T} = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|\hat{T} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\hat{T}$

O sea: $\vec{v} = \sqrt{9\cos^2 t + 25\sin^2 t}\,\hat{T}$ y en $t = 0,7$ $\vec{v} = 3,95\hat{T}$

La velocidad tiene como única componente la dirección del versor tangente.

Dado que el vector posición del punto P viene dado en coordenadas cartesianas, es posible conocer también la dirección del versor tangente en esas coordenadas.

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{s}} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{3\cos t\,\hat{i} - 5\sin t\,\hat{j}}{\sqrt{9\cos^2 t + 25\sin^2 t}}$$

Y en $t = 0,7$ vale:

$$\hat{T} = \frac{2,29\hat{i} - 3,22\,\hat{j}}{3,95} = 0,58\hat{i} - 0,82\,\hat{j}$$

Por lo tanto la velocidad es:

$$\boxed{\vec{v} = 3,95\hat{T} = 3,95(0,58\hat{i} - 0,82\,\hat{j})}$$

La aceleración se calcula con:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\hat{T}) = \ddot{s}\hat{T} + \frac{1}{R}\dot{s}^2\hat{N}$$

Donde $\dot{s} = \sqrt{9\cos^2 t + 25\sin^2 t} \;\therefore\!\rightarrow\; \ddot{s} = \dfrac{32\sin t\cos t}{2\sqrt{9\cos^2 t + 25\sin^2 t}}$

Reemplazando para $t = 0,7$

$$a_T = \ddot{s} = \frac{7,88}{3,95} = 2,00$$

Para hallar la aceleración centrípeta o normal, debemos hallar la curvatura con:

$$\frac{1}{R} = \frac{\left|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right|}{\dot{s}^3} = \frac{(3\cos t\,\hat{i} - 5\sin t\,\hat{j}) \times (-3\sin t\,\hat{i} - 5\cos t\,\hat{j})}{(\sqrt{9\cos^2 t + 25\sin^2 t})^3}$$

Reemplazando para $t = 0,7$

$$\frac{1}{R} = \frac{\left|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right|}{\dot{s}^3} = \frac{(2,29\hat{i} - 3,22\,\hat{j}) \times (-1,93\hat{i} - 3,82\,\hat{j})}{3,95^3} = 0,24$$

La aceleración centrípeta vale: $a_n = \dfrac{\dot{s}^2}{R} = \dfrac{3,95^2}{4,13} = 3,78$

Y la aceleración total es:

$$\boxed{\vec{a} = 2\hat{T} + 3,78\,\hat{N}} \quad \text{de módulo } \left|\vec{a}\right| = 4,28$$

Comparando este resultado con el obtenido en coordenadas polares, **Problema 3-5,** se observa que la velocidad en intrínsecas tiene una sola componente mientras tiene dos en polares. La aceleración tiene una sola componente en polares, dirigida al centro O, mientras que aquí tiene dos componentes, una según la tangente y otra según la normal a la curva.

Si se quisiera conocer la dirección de la normal, se usará la ecuación:

$$\hat{N} = \frac{R}{\dot{s}}\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{R}{\dot{s}}\frac{d}{dt}\left(\frac{3\cos t\,\hat{i} - 5\sin t\,\hat{j}}{\sqrt{9\cos^2 t + 25\sin^2 t}}\right)$$

Que para el tiempo $t = 0,7$, y por ser normal a $\hat{T}$, nos da:

$$\boxed{\hat{N} = -0,82\hat{i} - 0,58\,\hat{j}}$$

Si ahora hallamos el valor de la aceleración para $t = 0,7$ con lo valores hallados de $\hat{T}\ y\ \hat{N}$ encontramos:

$$\vec{a} = 2\hat{T} + 3,78\hat{N} =$$

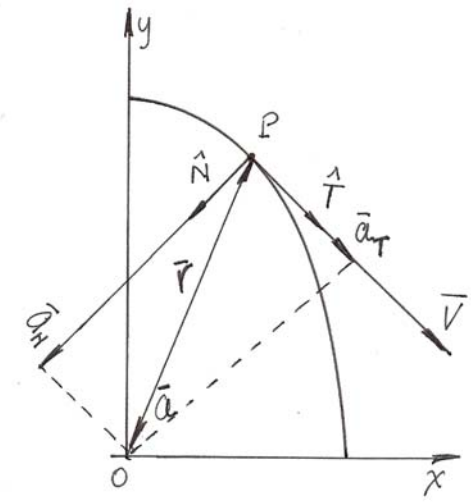
$$2(0,58\hat{i} - 0,82\hat{j}) + 3,78(-0,82\hat{i} - 0,58\hat{j})$$

$$\vec{a} = -1,93\hat{i} - 3,82\hat{j}$$

Si se compara este valor con el radio vector de P

$$\vec{r} = 3\sin t\,\hat{i} + 5\cos t\,\hat{j} = 1,93\hat{i} + 3,82\hat{j}$$

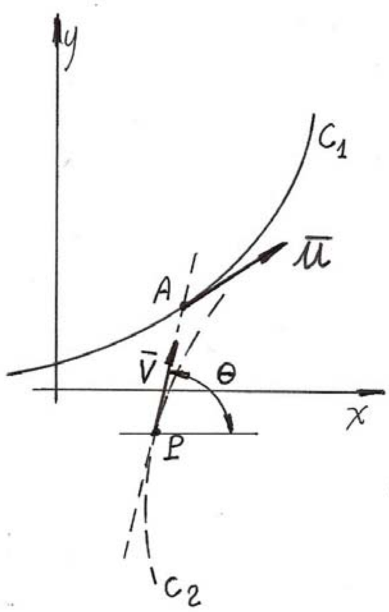
Se nota que la aceleración tiene la misma dirección y sentido contrario que el radio vector. Igual resultado se obtuvo en el **Problema 3-5.**



Ejemplo: Un interesante problema de persecución es el misil atacando a un avión al cual sigue, guiándose por sus gases de escape infrarrojos.

En una terna cartesiana ortogonal se define la trayectoria del avión como C_1 $y\ con\ C_2$ la trayectoria del misil en su seguimiento. Las características del misil son que su velocidad en todo instante es tangente a su trayectoria C_2 y apuntando siempre al target o blanco que es el avión.

Sean $A(x_A; y_A)$ las coordenadas del blanco en un instante cualquiera, con una velocidad $\vec{u}$ tangente a su trayectoria; mientras que el misil $P(x; y)$ tiene esas coordenadas y con una velocidad $\vec{v}$ también tangente a su trayectoria.

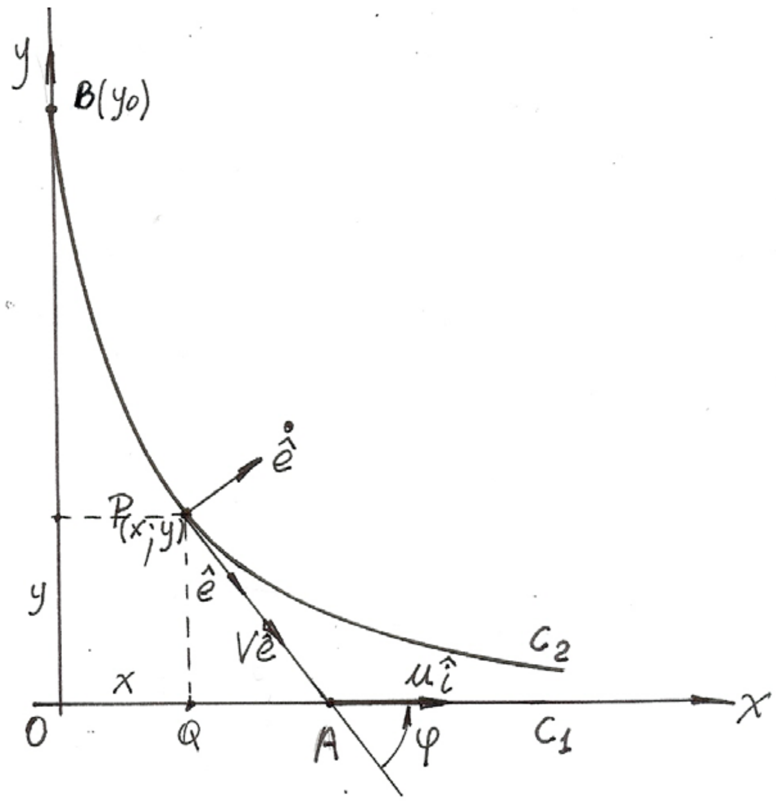


Dado que en cada punto de su trayectoria C_2 el misil apunta al avión A, la condición se expresa como: $\tan\theta = \dfrac{y_A - y}{x_A - x}$

Y como este valor coincide con la derivada de la trayectoria de C_2 en el punto P la condición se resume en: $\boxed{y_A - y = y'_P(x_A - x)}$

Problema 3-11

L



En los casos prácticos de persecución misil-avión, hay importantes simplificaciones tales como: la trayectoria del avión C_1 es rectilínea, su velocidad es constante y la velocidad del misil también es de módulo constante en el camino C_2.

Se toman como condiciones iniciales, para

$$t = 0 \begin{cases} x_A = 0 \quad x_P = 0 \\ y_A = 0 \quad y_P = y_0 \\ \varphi = \pi / 2 \end{cases}$$

Mientras que para el instante genérico

$$t = t \begin{cases} A(ut;0) \\ P(x;y) \end{cases}$$

$|\vec{v}|$ y $|\vec{u}|$ son constantes

En el instante t considerado, el avión habrá recorrido la distancia $\overline{OA} = ut\,\hat{i}$, mientras el misil habrá recorrido la distancia de la curva $\overset{\frown}{BP} = \rho = Vt$.

Además la velocidad del misil es mayor a la del avión, por lo cual $u = kV$ con k variando entre $0 < k < 1$.

La distancia recorrida por el avión podemos igualarla a las sumas de los segmentos:

$$ut = x + \overline{QA} = x + \frac{y}{\tan\varphi}$$

Como la trayectoria C_2 es una cierta función $y = f(x)$, su derivada en el punto P es negativa y coincide con $\tan\varphi$ en el mismo punto. Por lo tanto la expresión anterior toma la forma:

$$ut = x - \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = x - y\frac{dx}{dy}$$

Si reemplazamos u por $u = kV$, y recordando que $Vt = \rho$, o sea, el arco recorrido por el misil desde B a P, la fórmula anterior se convierte en:

$$kVt = k\rho = x - y\frac{dx}{dy} \qquad (*)$$

Y por ser el arco $\overset{\frown}{BP}$ la integral entre B y P de:

$$\rho = \int_B^P \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_B^P \sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2}\, dy$$

Reemplazando este valor en la ecuación $(*)$ y luego derivándola respecto a y, obtenemos la ecuación diferencial:

$$k\sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2} = -y\frac{d^2x}{dy^2} \qquad (**)$$

Para su integración puede ponerse:

$$\frac{dx}{dy} = Sh\, z$$

Reemplazando en $(**)$, luego de derivar, nos da:

$$k\, Ch\, z = -y\, Ch\, z \frac{dz}{dy} \text{ o sea } \rightarrow -k\frac{dy}{y} = dz$$

Cuya integración deberá hacerse entre los puntos B y P:

$$-k\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = z \text{ es decir } \boxed{z = -k\ln(\frac{y}{y_0}) = \ln(\frac{y_0}{y})^k}$$

Reemplazando z y teniendo en cuenta que:

$$\frac{dx}{dy} = Sh\, z = \frac{1}{2}\left[e^z - e^{-z}\right] = \frac{1}{2}\left[(\frac{y_0}{y})^k - (\frac{y}{y_0})^k\right]$$

Integrando nuevamente entre los puntos B y P:

$$\boxed{x = \frac{y_0^k}{2}\int_{y_0}^{y} y^{-k}\,dy - \frac{1}{2y_0^k}\int_{y_0}^{y} y^k\,dy}$$

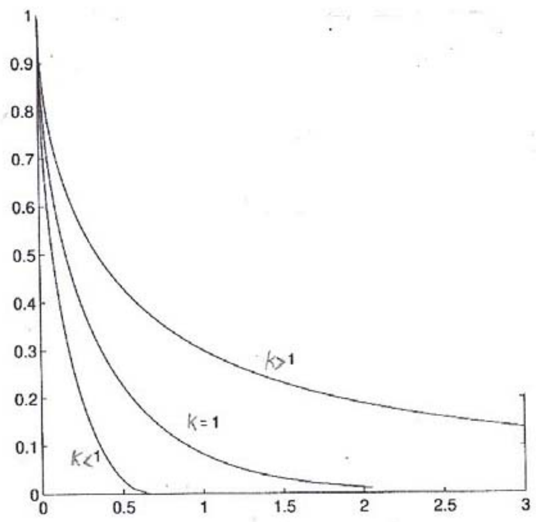
Y la ecuación de la trayectoria resultante es:

$$\boxed{x = \left[y_0^k \frac{y^{1-k}}{2(1-k)} - y_0^{-k} \frac{y^{k+1}}{2(k+1)} \right] + \frac{4ky_0}{1-k^2}}$$

Para que el misil alcance el blanco deberá verificarse que

$V > u \ \therefore\ k < 1$, por lo cual la ecuación de x asegura que el tiempo de impacto será menor a:

$$\boxed{t = \frac{4y_0}{V(1-k^2)}}$$

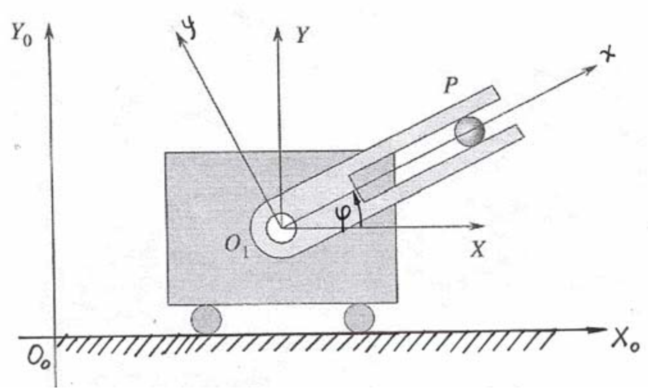


4.-) Movimiento relativo o movimiento referido a ternas móviles

En los casos en que el movimiento de una partícula es muy complejo o que sea resultado de la combinación de más de un movimiento, resulta práctico utilizar más de un sistema de referencia para fijar el movimiento final.

En tales casos se utiliza el principio de superposición de movimientos, como puede verse en la figura adjunta.

El movimiento del punto P puede plantearse directamente en el sistema cartesiano $O_o X_o Y_o$, considerado el sistema en reposo respecto del observador, o puede verse con referencia al sistema móvil de traslación $O_1 XY$.



Finalmente puede estudiarse directamente en el sistema móvil que rota y se traslada $O_1 xy$.

Si el movimiento se analiza en este último sistema, la partícula P aparecerá moviéndose solamente a lo largo del eje x. La composición de movimientos obliga a considerar la rotación propia del último sistema, que se referirá al sistema móvil $O_1 XY$, finalmente deberá componerse este sistema móvil de traslación con respecto al de referencia $O_o X_o Y_o$ que está en reposo respecto al observador. Como ternas móviles de referencia se pueden adoptar ternas de traslación, de rotación o combinación de ambas características.

Así el planteo de analizar el movimiento de una partícula en un sistema móvil y referirlo luego al sistema fijo, recibe el nombre de movimiento relativo. Las ventajas de este método son bastante obvias ya que el análisis en cada uno de los sistemas se vuelve sencillo de plantear matemáticamente, para luego sumar vectorialmente las magnitudes obtenidas.

Como además este análisis del movimiento de una partícula se completará con el estudio del movimiento de un punto material de masa m sometido a fuerzas, tema correspondiente a la dinámica, se verá oportunamente cómo la aplicación de la teoría de Newton exige que el sistema de referencia final sea inercial, o sea, en reposo absoluto respecto a las estrellas fijas o con velocidad rectilínea y uniforme.

Movimiento referido a una terna móvil que rota y se traslada

Supongamos un sistema $OXYZ$, que consideramos fijo, y un observador fijo en ese sistema; y consideremos un sistema $O_1 xyz$ que se halla en movimiento respecto al anterior en el cual existen observadores fijos al mismo.

Si tenemos una partícula A en movimiento, los observadores de ambos sistemas verán el movimiento de la misma de una forma diferente.

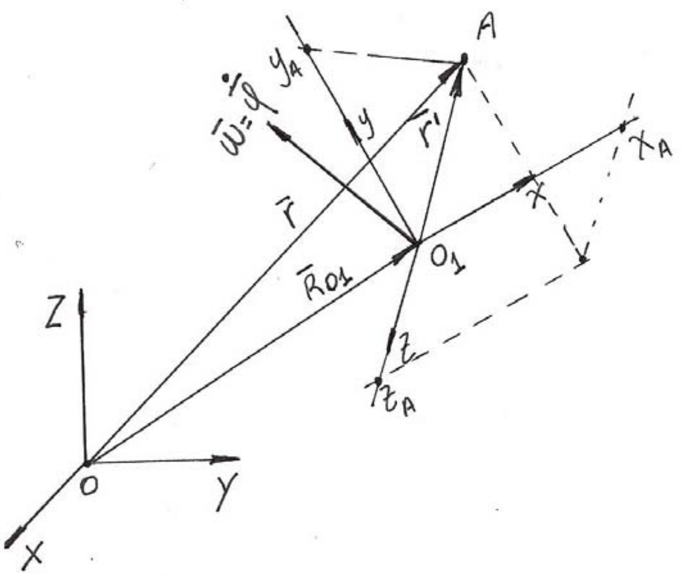
Al hacer ambos observadores sus propias mediciones de las velocidades y aceleraciones de la partícula, las conclusiones a que lleguen deben poder relacionarse entre sí.

El movimiento del sistema móvil respecto al fijo, puede pensarse como la superposición de una traslación y una rotación. Es decir, haciendo uso del Principio de Superposición, la velocidad y la aceleración de una partícula se forman con dos términos:
el debido al sistema móvil si sólo se trasladara y el debido al sistema móvil si sólo rotara. Esto será demostrado posteriormente.

Será posible entonces estudiar los movimientos de traslación y de rotación en forma separada y por fin sumar vectorialmente los resultados obtenidos para llegar al movimiento resultante.

Sea el caso de una partícula A cuyo movimiento es analizado por los observadores del sistema móvil O_1xyz y por los observadores que están en el sistema fijo $OXYZ$.

El origen O_1 de la terna móvil tiene como vector posición a $\vec{R}_{01}$ referido a la terna fija en O. Además, la terna móvil tiene un movimiento de rotación propio alrededor de su origen O_1 de vector $\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$ que es un componente más del movimiento de la partícula.



La partícula A tiene un vector posición respecto a la terna móvil que es $\vec{r}\,'_{(x,y,z)}$ de componentes:

$$\vec{r}\,' = x\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}\,.$$

Mientras que con respecto a la terna inercial O el vector posición de la partícula A es

$$\vec{r} = \vec{R}_{01} + \vec{r}\,' \qquad (3\text{-}42)$$

1.– Análisis de la velocidad de la partícula.

Si los observadores del sistema fijo quieren hallar la velocidad de la partícula A, deberán derivar al vector posición, o sea, derivar la expresión (3-42) mediante la expresión:

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_F = \left(\frac{d\vec{R}_{01}}{dt}\right)_F + \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_F = \vec{V}_{01} + \vec{v}\,' \qquad (3\text{-}43)$$

Donde el subíndice $)_F$ puesto al lado de la derivada significa que la misma es con respecto al sistema fijo.

Siendo $\vec{r}\,' = x\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$ (como se ve, definido en componentes de la terna móvil).

$$\vec{v}\,' = (\frac{d\vec{r}\,'}{dt})_F = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \qquad (3\text{-}44)$$

donde los versores $\hat{i}\ \hat{j}\,\hat{k}$ deben también ser derivados ya que ellos son variables respecto a la terna fija, por estar rotando junto a la terna móvil.

De acuerdo con lo ya visto, la velocidad de rotación de un vector de módulo constante venía dada por las fórmulas de Poisson:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{i} \quad \therefore \quad x\dfrac{d\hat{i}}{dt} = x(\vec{\omega}\times\hat{i}) = (\vec{\omega}\times x\hat{i}) \\ \dfrac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{j} \quad \therefore \quad y\dfrac{d\hat{j}}{dt} = y(\vec{\omega}\times\hat{j}) = (\vec{\omega}\times y\hat{j}) \\ \dfrac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{k} \quad \therefore \quad z\dfrac{d\hat{k}}{dt} = z(\vec{\omega}\times\hat{k}) = (\vec{\omega}\times z\hat{k}) \end{cases} \qquad (3\text{-}45)$$

Por lo tanto, la ecuación (3-44) se convierte en:

$$\begin{aligned} \vec{v}\,' = (\frac{d\vec{r}\,'}{dt})_F &= \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} + \dot{z}\,\hat{k} + \vec{\omega}\times(x\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}) = \\ &\vec{v}\,' = \vec{V}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' = \vec{V}_r + \vec{V}_a \end{aligned} \qquad (3\text{-}46)$$

La velocidad $\vec{v}\,'$ de la partícula es la suma de una velocidad que llamaremos relativa, $\vec{V}_r$ medida por los observadores del sistema móvil, más una velocidad de rotación debida al movimiento de rotación de la terna móvil respecto a la fija. Esta última velocidad es también denominada velocidad de arrastre.

La fórmula (3-43) que da la velocidad de la partícula respecto al sistema fijo, se completa con la derivada

$$\vec{V}_{01} = \frac{d}{dt}(x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k})_F = \dot{\vec{R}}_{01}$$

Velocidad expresada también en componentes de la terna móvil.
Luego la velocidad de la partícula, respecto a la terna fija, será:

$$\boxed{\vec{v} = (\frac{d\vec{r}}{dt})_F = \vec{V}_{01} + \vec{v}\,' = \dot{\vec{R}}_{01} + \vec{V}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'} \qquad (3\text{-}47)$$

Siendo su interpretación: $\vec{v}$ es la velocidad (denominada, desde el punto de vista físico, total o absoluta) de la partícula respecto a la terna fija.

$\dot{\vec{R}}_{01}$ velocidad de traslación de la terna móvil respecto a la fija que se toma como parte de la velocidad de arrastre.

$\vec{V}_r$ velocidad relativa de la partícula referida a la terna móvil, obtenida con la derivada relativa del vector posición $\vec{r}\,'$. $\quad \vec{V}_r = \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j} + \dfrac{dz}{dt}\hat{k}$

$\vec{V}_a = \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$ velocidad de arrastre de la partícula debido a la rotación de la terna móvil.

$\vec{v}\,' = (\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt})_F$ es la derivada respecto a la terna fija, del vector posición $\vec{r}\,'$ de la partícula medida desde el sistema móvil.

En resumen la velocidad total de la partícula es:

$$\boxed{\vec{v} = (\frac{d\vec{r}}{dt})_F = \vec{V}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' + \dot{\vec{R}}_{01} = \vec{V}_r + \vec{V}_a + \dot{\vec{R}}_{01}} \qquad (3\text{-}47)'$$

2.– **Análisis de la aceleración de la partícula**

La expresión de la aceleración se obtiene también como derivada respecto a la terna fija del vector velocidad hallado anteriormente. La expresión de la derivada respecto a la terna fija significa que cada vector, desplazamiento o velocidad, debe ser derivado respecto a esa terna y no respecto a la terna móvil o relativa, pero las componentes son tomadas en la terna móvil, por mayor simplicidad. Los ejemplos posteriores aclararán estos aspectos.

$$\vec{a} = (\frac{d\vec{v}}{dt})_F = \ddot{\vec{R}}_{01} + \frac{d}{dt}(\vec{V}_r)_F + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')_F \qquad (3\text{-}48)$$

Dado que la velocidad relativa tenía como expresión: $\vec{V}_r = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$

su nueva derivada respecto a la terna fija será:

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_r)_F = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} + \dot{x}\frac{d\,\hat{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\,\hat{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\,\hat{k}}{dt} =$$

$$\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j} + \ddot{z}\,\hat{k} + \vec{\omega}\times(\dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} + \dot{z}\,\hat{k}) = \vec{a}_r + \vec{\omega}\times\vec{V}_r$$

Luego falta derivar

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')_F = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times\frac{d}{dt}(\vec{r}\,')_F = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times\vec{V}_r + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

Sumando a la expresión anterior:

$$\boxed{\vec{a} = (\frac{d\vec{v}}{dt})_F = \ddot{\vec{R}}_{01} + \vec{a}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')} \qquad (3\text{-}49)$$

$$\boxed{\vec{a} = (\frac{d\vec{v}}{dt})_F = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_a} \quad \text{Con} \quad \vec{a}_a = \ddot{\vec{R}}_{01} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

Cuya interpretación es: $\vec{a}$ es la aceleración total o absoluta de la partícula respecto a la terna fija.

$\ddot{\vec{R}}_{01}$ aceleración de traslación de la terna móvil, a veces forma parte de la aceleración de arrastre.

$\vec{a}_r$ aceleración relativa de la partícula referida a la terna móvil. $\vec{a}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r$ aceleración de Coriolis.

$\vec{a}_a = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$ es la aceleración de arrastre de la partícula debido a la rotación de la terna móvil. En Física, al valor $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$ se lo denomina aceleración centrípeta.

La ecuación (3-49) la cual expresa la aceleración vista desde la terna fija como suma de las aceleraciones relevadas desde la terna móvil, se conoce como el “teorema de Coriolis”. Más adelante volveremos a su uso en la dinámica para sistemas no inerciales.

Teorema de la derivada relativa de vectores

Volviendo a la fórmula (3-46) puede notarse que la derivada de un vector, definido en una terna móvil, respecto a la terna fija, da origen a dos vectores:

$$(\frac{d\vec{r}\,'}{dt})_F = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} + \dot{z}\,\hat{k} + \vec{\omega}\times(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}) = (\frac{d\vec{r}\,'}{dt})_R + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

Que puede ser interpretado como si la derivada respecto a la terna fija (denominada también derivada absoluta) de un vector cualquiera $\vec{B}$, con sus coordenadas definidas en la terna móvil, es igual a la derivada del mismo vector respecto a la terna móvil o relativa (denominada derivada relativa), más el producto vectorial de la velocidad angular de la terna móvil por dicho vector. O sea, se tiene la igualdad:

$$\boxed{(\frac{d\vec{B}}{dt})_F = (\frac{d\vec{B}}{dt})_R + \vec{\omega}\times\vec{B}} \qquad (3\text{-}50)$$

La ecuación anterior permite generalizar el concepto de derivada absoluta y derivada relativa mediante la creación de un nuevo operador:

$$\boxed{(\frac{d\,..}{dt})_F = (\frac{d\,..}{dt})_R + \vec{\omega}\times ..} \qquad (3\text{-}51)$$

tal que aplicado a una magnitud vectorial definida en una terna relativa, permite obtener su derivada absoluta o referida a la terna fija.

Tanto la fórmula (3-50) como el operador se aplican para el caso en que la terna relativa tenga un origen común o no con la terna fija $O \equiv O_1$, pero que cumpla con la condición: $\dot{\vec{V}}_{01} = \ddot{\vec{R}}_{01} = 0$.

Un ejemplo muy claro de esta propiedad se tiene si se deriva la velocidad

$$\vec{v} = (\frac{d\vec{r}\,'}{dt})_R + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' = \vec{V}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

respecto a la terna fija con la fórmula: $(\frac{d\vec{v}}{dt})_F = (\frac{d\vec{v}}{dt})_R + \vec{\omega}\times\vec{v}$

de la cual se obtiene la aceleración:

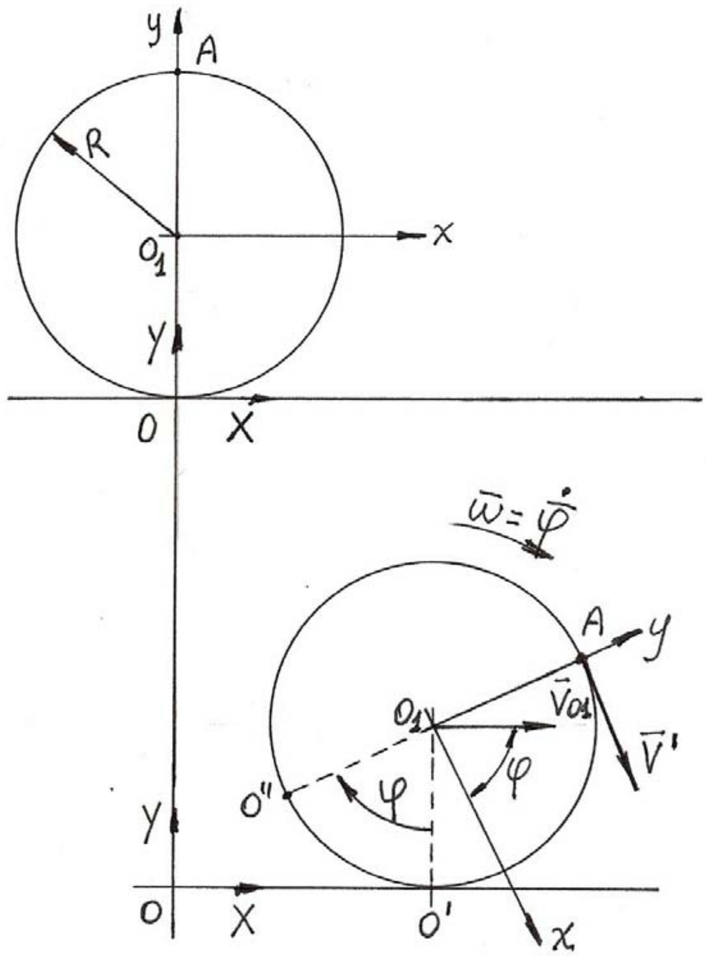
$$\vec{a} = (\frac{d\vec{v}}{dt})_F = \vec{a}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

El planteo de analizar el movimiento de una partícula en un sistema móvil y referirlo luego al sistema fijo, recibe el nombre de movimiento relativo.

Ejemplo:

El punto A se encuentra fijo sobre un aro de radio R que comienza a rodar sin deslizarse a lo largo de un plano. En la figura inferior se muestra al mismo aro un tiempo después que comenzó a rodar, siempre sobre la misma trayectoria plana.

Llamaremos OXY al sistema cartesiano en reposo y adoptaremos un sistema móvil de traslación y de rotación O_1xy para analizar el movimiento del punto A fijo al disco.



Cuando el aro gire un ángulo φ, simultáneamente el centro O_1 se desplazará una distancia $\overline{OO'}$, con respecto a la terna fija. A su vez el punto A habrá rotado un ángulo φ junto a la terna relativa (o terna móvil) O_1xy. La velocidad de rotación de la terna es $\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\hat{k} = cte.$

Velocidad:

La terna móvil adoptada tiene una velocidad de traslación $\vec{V}_{01}$ respecto de O.

La velocidad relativa de A respecto a la terna móvil es la derivada relativa del vector posición $\vec{r}\,' = R\,\hat{j}$ y en consecuencia su velocidad relativa es:

$\vec{V}_r = \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt} = 0$ Pues el vector $\vec{r}\,'$ es fijo a la terna móvil.

Como la terna móvil gira con una velocidad angular $\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\,\hat{k}$

la velocidad de arrastre del punto A es:

$$\vec{V}_a = \vec{\omega} \times \vec{r}\,' = -\dot{\varphi}\hat{k} \times R\,\hat{j} = \dot{\varphi} R\,\hat{i}$$

Y la componente móvil de la velocidad de A es:

$$\vec{v}\,' = (\frac{d\vec{r}\,'}{dt})_F = \vec{V}_r + \vec{V}_a = \dot{\varphi} R\,\hat{i}$$

La velocidad del origen O_1 respecto a la terna fija, en componentes de la terna móvil, es:

$$\vec{V}_{O1} = \dot{\vec{R}}_{01} = \dot{\varphi} R\cos\varphi\,\hat{i} + \dot{\varphi} R\sin\varphi\,\hat{j}$$

Con lo cual la velocidad total o absoluta, suma de ambas, en componentes de la terna móvil, será:

$$\vec{v} = \vec{V}_{01} + \vec{v}\,' = (R\dot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\varphi})\,\hat{i} + R\dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{j}$$

Obsérvese que cuando el punto A está en la posición de O', el ángulo $\varphi = \pi$, y en consecuencia la velocidad del punto A en esa posición es:

$$\vec{v}_{O'} = (R\dot{\varphi}\cos\pi + R\dot{\varphi})\,\hat{i} + R\dot{\varphi}\sin\pi\,\hat{j} = 0$$

Es decir, la velocidad total del punto de contacto de un aro que rota sin resbalar es nula. Se denomina a tal punto “centro instantáneo de rotación”.

Aceleración:

A partir de la expresión de la velocidad y del vector posición en la terna móvil, se pueden obtener las diferentes componentes de la aceleración.

Conocidos $\begin{cases} \vec{r}\,' = R\,\hat{j} \quad y \quad \vec{\omega} = -\dot{\varphi}\hat{k} \\ \vec{V}_r = 0 \end{cases}$

$\ddot{\vec{R}}_{01} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{R}}_{01})_F = \ddot{\varphi} R\,\hat{i} = 0$ Es nula pues $\dot{\varphi} = cte.$

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} = 0$$

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r = 0$ Pues $\vec{V}_r = 0$

$$\vec{a}_a = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = -R\dot{\varphi}^2\ \hat{j}$$

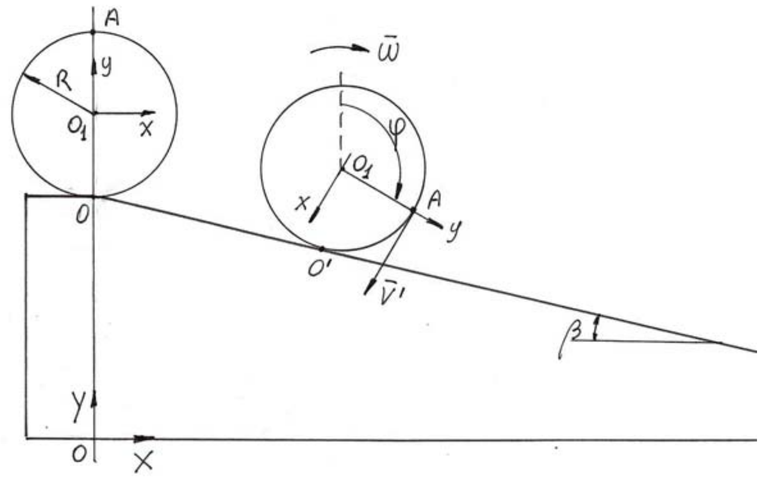
Sumando vectorialmente: $\vec{a} = (\dfrac{d\vec{v}}{dt})_F = \ddot{\vec{R}}_{01} + \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_a = -R\dot{\varphi}^2\ \hat{j}$

Valor de la aceleración respecto a la terna fija de la partícula A, en coordenadas de la terna móvil.

Problema 3-12:

Hallar la velocidad y la aceleración respecto a la terna fija ubicada en el origen O, de una partícula A fija a la parte externa de un aro circular que rueda sin resbalar por una rampa inclinada en un ángulo β.

La velocidad angular del aro es variable con el tiempo mientras que su aceleración angular γ es constante.



Solución:

La terna móvil se ubica en el origen móvil O_1 y la asumimos rotando solidaria al aro. Los datos conocidos son: $\vec{r}\,' = R\ \hat{j}$; $\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\,\hat{k}$; $\vec{\gamma} = -\ddot{\varphi}\,\hat{k} = Cte.$

Velocidad:

$1.-$ Velocidad del origen de la terna móvil: su módulo es el valor $\dot{\varphi}R$ y su dirección es la de la rampa $\overline{OO'}$. Por lo cual sus componentes en la terna fija OXY son:

$$\vec{V}_{01} = \dot{\varphi}R(\cos\beta\,\hat{i}_0 - \sin\beta\ \hat{j}_0)$$

Pero, como todos los valores deben estar en componentes de la terna móvil, las dos componentes anteriores deben expresarse en la terna O_1xy rotada en un ángulo φ.

$$\vec{V}_{01} = \dot{\varphi}R[\cos(\varphi - \beta)\,\hat{i} + \sin(\varphi - \beta)\ \hat{j}]$$

$2.-$ Velocidad relativa del punto A. $\vec{V}_r = \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt} = \dfrac{d}{dt}(R\,\hat{j}) = 0$

$3.-$ Velocidad de arrastre del punto A. $\vec{V}_a = \vec{\omega} \times \vec{r}\,' = -\dot{\varphi}\,\hat{k} \times R\,\hat{j} = \dot{\varphi} R\,\hat{i}$

$4.-$ Velocidad del punto A respecto a la terna fija o al observador fijo.

$$\vec{v} = [\dot{\varphi} R \cos(\varphi - \beta) + \dot{\varphi} R]\hat{i} + \dot{\varphi} R \sin(\varphi - \beta)\,\hat{j}$$

Aceleración:

Conocidos $\vec{r}\,' = R\,\hat{j}$; $\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\,\hat{k}$; $\vec{V}_r = 0$; $\vec{\gamma} = -\ddot{\varphi}\,\hat{k} = Cte.$

$1.-$ Aceleración del origen móvil O_1.

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_{01})_F = \ddot{\varphi} R[\cos(\varphi - \beta)\,\hat{i} + \sin(\varphi - \beta)\,\hat{j}] +$$
$$+ \dot{\varphi}^2 R[-\sin(\varphi - \beta)\,\hat{i} + \cos(\varphi - \beta)\,\hat{j}]$$

$2.-$ Aceleración relativa del punto A. $\vec{a}_r = \dfrac{d\vec{V}_r}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\hat{k} = 0$

$3.-$ Aceleración de Coriolis. $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r = 0$ Pues $\vec{V}_r = 0$

$4.-$ Aceleración de arrastre del punto A.

4-1 $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' = -\gamma\hat{k} \times R\,\hat{j} = \gamma R\,\hat{i} = \ddot{\varphi} R\,\hat{i}$

4-2 $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = -R\dot{\varphi}^2\,\hat{j}$

$$\vec{a}_a = \ddot{\varphi} R\,\hat{i} - \dot{\varphi}^2 R\,\hat{j}$$

Finalmente la aceleración del punto A respecto a la terna fija, también denominada aceleración total o absoluta, será la suma vectorial de las anteriores.

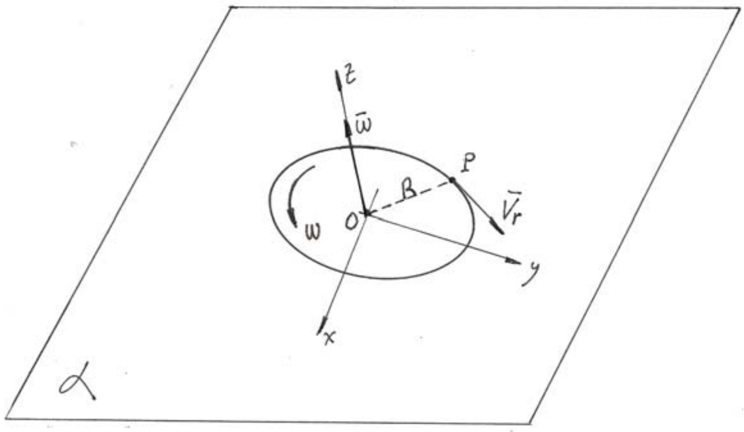
$$\vec{a} = \ddot{\varphi} R\,\hat{i} - \dot{\varphi}^2 R\,\hat{j} + \ddot{\varphi} R[\cos(\varphi - \beta)\,\hat{i} + \sin(\varphi - \beta)\,\hat{j}] +$$
$$+ \dot{\varphi}^2 R[-\sin(\varphi - \beta)\,\hat{i} + \cos(\varphi - \beta)\,\hat{j}]$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\varphi} R[1 + \cos(\varphi - \beta)] - \dot{\varphi}^2 R \sin(\varphi - \beta)\right)\hat{i}$$
$$+ \left(\ddot{\varphi} R \sin(\varphi - \beta) - \dot{\varphi}^2 R[1 - \cos(\varphi - \beta)]\right)\hat{j}$$

Problema 3-13:

Un disco está girando con velocidad angular ω constante en el plano α y en el sentido contrario a las agujas del reloj, respecto a un observador fijo al plano y con origen en O.

Un punto P se halla en movimiento respecto al disco con una velocidad relativa $\vec{V}_r$ de módulo ωR constante y de sentido contrario al giro del disco.



Si se elige un sistema de coordenadas relativas, fijas al disco, las mismas girarán con velocidad angular $\vec{\omega}$ normal al plano del disco. Hallar la velocidad y la aceleración del punto P respecto al observador fijo.

Solución. Utilizando la expresión general de la velocidad $\vec{v} = \dot{\vec{R}}_{01} + \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$

Se observa que el origen O_1 coincide con el origen fijo O por lo cual $\vec{V}_{01} = 0$

Asumamos que la posición instantánea del punto P sea:

$$\vec{r}\,' = R\cos\theta\,\hat{i} + R\sin\theta\,\hat{j}$$

Con lo cual la velocidad de arrastre, también circular uniforme, tiene por expresión:

$$\vec{V}_a = \vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \omega R(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})$$

Y la velocidad relativa del punto respecto al disco tiene el mismo módulo y sentido contrario.

$$\vec{V}_r = \dot{\theta} R(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) \quad \text{donde } \dot{\theta} = -\omega$$

De modo que su velocidad relativa (o velocidad tangencial) será:

$$\vec{V}_r = -\omega R(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) \;\therefore\; \vec{V}_r = -\vec{V}_a$$

Por lo tanto, su velocidad respecto al observador fijo es:

$$\boxed{\vec{v} = 0}$$

Aceleración. Utilizando la expresión general:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}}_{01} + \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

Por las características del movimiento del punto P se nota que:

$$\ddot{\vec{R}}_{01} = 0 \quad ; \quad \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} = 0$$

Quedando ahora: $\vec{a}_r = \dfrac{d\vec{V}_r}{dt} = \dot{\theta}^2 R(-\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j})$ o en módulo:

$$a_r = \dot{\theta}^2 R = -\omega^2 R$$

Aceleración de Coriolis: $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r \rightarrow$ En módulo $a_c = 2\omega^2 R$

Aceleración de arrastre: $\vec{a}_r = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') \rightarrow$ En módulo $a_a = -\omega^2 R$

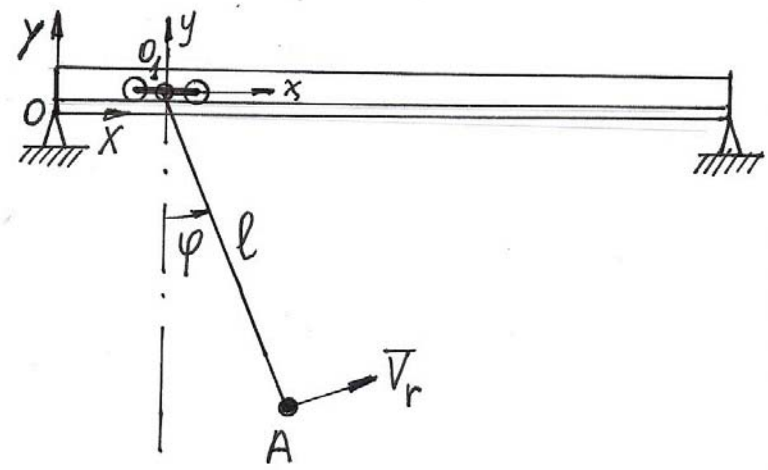
Cuyas sumas dan la aceleración del punto P visto desde la terna fija: $\boxed{\vec{a} = 0}$

Tal como era de prever, tanto la velocidad como la aceleración son nulas desde la terna fija, simplemente porque el punto P está en reposo respecto de la terna fija.

Problema 3-14:

Un punto material A tiene un movimiento combinado debido al desplazamiento de un carro acelerado y de un movimiento angular también acelerado.

Se desea conocer la velocidad y la aceleración de A medidas en la terna fija.



Solución:

Para ello recurre al sistema móvil O_1xy que se desplaza a lo largo del eje $X\,\hat{i}_0$ o $x\,\hat{i}$, pero que no participa de la rotación del punto A alrededor de O_1.

El vector posición de A en la terna móvil es: $\vec{r}\,' = l\sin\varphi\,\hat{i} - l\cos\varphi\,\hat{j}$

El vector rotación de la terna móvil es: $\vec{\omega} = 0$ pues la terna no rota respecto a la fija.

El origen móvil O_1 tiene una velocidad y una aceleración $\dot{X}$ y $\ddot{X}$ en la dirección de $\hat{i}_0$.

Velocidad:

Aplicando la fórmula: $\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_F = \dot{\vec{R}}_{01} + \vec{V}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$

Hallaremos los valores: $\vec{V}_{O1} = \dot{x}\,\hat{i}$

Velocidad relativa: $\vec{V}_r = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = l\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{i} + l\dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{j}$

Velocidad de rotación relativa: $\vec{\omega}\times\vec{r}\,' = 0$ dado que la terna móvil no rota.

Velocidad de A respecto a la terna fija: $\vec{v} = (\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi)\,\hat{i} + l\dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{j}$

Aceleración:

Nuevamente con la fórmula: $\vec{a} = \ddot{\vec{R}}_{01} + \vec{a}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$

Aceleración del origen móvil: $\vec{a}_{01} = \frac{d\vec{V}_{O1}}{dt} = \ddot{x}\,\hat{i}$

Aceleración relativa:

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt} = (l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi)\,\hat{i} + (l\ddot{\varphi}\sin\varphi + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\,\hat{j}$$

Todas las demás aceleraciones son nulas dado que la terna móvil no rota y $\therefore\ \vec{\omega} = 0$.

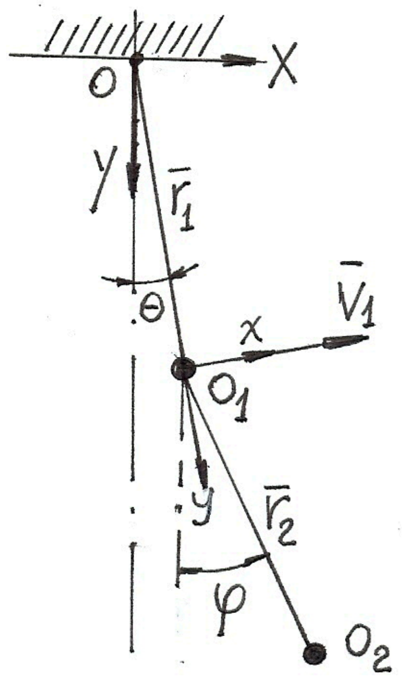
La aceleración de A respecto a la terna fija es:

$$\vec{a} = (\ddot{x} + l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi)\,\hat{i} + (l\ddot{\varphi}\sin\varphi + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\,\hat{j}$$

Problema 3-15:

Considérese el doble péndulo con dos masas puntuales identificadas por los puntos O_1 y O_2.

Hallar las velocidades y las aceleraciones de los puntos O_1 y O_2 respecto a la terna fija OXY. Son conocidos los vectores posición de O_1 y O_2, $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, se toman como variables los ángulos θ y φ. $\begin{cases} \vec{r}_1 = r_1\,\hat{j} \\ \vec{r}_2 = r_2[\sin(\varphi-\theta)\,\hat{i} + \cos(\varphi-\theta)\,\hat{j}] \end{cases}$



Como terna móvil se elige la O_1xy que tiene una velocidad $\vec{v}_1$ respecto a la terna fija y una velocidad angular $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\hat{k}$ también respecto a la terna fija.

Solución:

La velocidad del punto O_1 se plantea como siempre: $\vec{v} = \vec{V}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}_1 + \dot{\vec{R}}_{01}$

Cálculos para O_1: Dado que $\vec{V}_r = 0$ y $\dot{\vec{R}}_{01} = 0$, la velocidad de O_1 es:

$$\boxed{\vec{V}_1 = \vec{\omega}\times\vec{r}_1 = -\dot{\theta}\,\hat{k}\times r_1\,\hat{j} = \dot{\theta}r_1\,\hat{i}}$$

Y su aceleración es: $\vec{a} = \ddot{\vec{R}}_{01} + \vec{a}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_1 + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_1)$

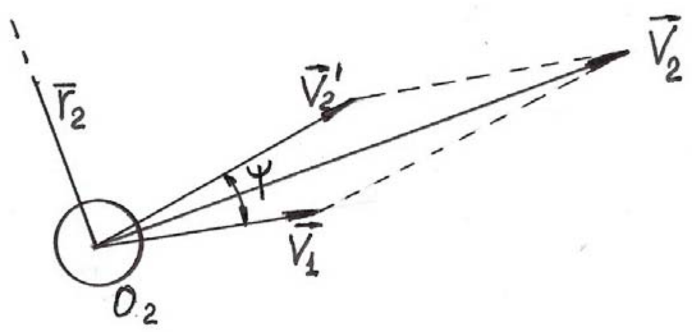
Nuevamente, dado que $\ddot{\vec{R}}_{01}=0$; $\vec{a}_r=0$; $2\vec{\omega}\times\vec{V}_r=0$ puesto que $\vec{V}_r=0$

Se calcularán $\begin{cases}\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_1=-\ddot{\theta}\,\hat{k}\times r_1\hat{j}=\ddot{\theta}r_1\,\hat{i}\\ \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_1)=-\dot{\theta}\hat{k}\times(-\dot{\theta}\hat{k}\times r_1\hat{j})=-\dot{\theta}^2 r_1\hat{j}\end{cases}$

Por lo tanto:

$$\boxed{\vec{a}_1=\ddot{\theta}r_1\,\hat{i}-\dot{\theta}^2 r_1\hat{j}}$$

Cálculos para O_2.



Por otra parte, la velocidad respecto a la terna fija $\vec{V}_2$ del punto O_2 será la suma vectorial de su velocidad relativa $\vec{V}_2\,'$ y de $\vec{V}_1$ $\therefore$ $\vec{V}_2=\vec{V}_1+\vec{V}_2'$ según el diagrama visto en la parte superior.

En donde $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2'$ tienen las expresiones:

$$\vec{V}_1=\dot{\theta}r_1\,\hat{i}$$

Y

$$\vec{V}_2'=\frac{d\vec{r}_2}{dt}=\frac{d}{dt}r_2[\sin(\varphi-\theta)\hat{i}+\cos(\varphi-\theta)]$$

$$\vec{V}_2'=\frac{d}{dt}r_2[\sin(\psi)\hat{i}+\cos(\psi)]$$ Puesto que $\psi=\varphi-\theta$

$$\vec{V}_2'=r_2\dot{\psi}(\cos\psi\hat{i}-\sin\psi\,\hat{j})$$

Con lo cual obtenemos la velocidad del punto O_2 respecto a la terna fija:

$$\vec{V}_2=\vec{V}_1+\vec{V}_2'=(\dot{\theta}r_1+r_2\dot{\psi}\cos\psi)\hat{i}-r_2\dot{\psi}\sin\psi\,\hat{j}$$

$$\vec{V}_2=\vec{V}_1+\vec{V}_2'=[\dot{\theta}r_1+r_2(\dot{\varphi}-\dot{\theta})]\cos(\varphi-\theta)\hat{i}-r_2(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\sin(\varphi-\theta)\,\hat{j}$$

Debe observarse que la velocidad angular $\dot{\psi} = \dot{\varphi} - \dot{\theta}$ es sólo aparentemente compuesta de $\dot{\varphi}$ y $\dot{\theta}$ ya que la última velocidad angular es nula con respecto a la terna móvil. Por tal motivo se tiene que

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} - \dot{\theta} = \dot{\varphi}$$

Y la velocidad de O_2 respecto a la terna fija es:

$$\boxed{\vec{V}_2 = (\dot{\theta} r_1 + r_2 \dot{\varphi}) \cos(\varphi - \theta) \hat{i} - r_2 \dot{\varphi} \sin(\varphi - \theta) \hat{j}}$$

Esta velocidad está en componentes de la terna móvil, si la quisiéramos en componentes de la terna fija basta proyectarla sobre dicha terna:

$$\begin{cases} V_{2x} = (\dot{\theta} r_1 + r_2 \dot{\varphi} \cos\psi) \cos\theta - r_2 \dot{\varphi} \sin\psi \sin\theta \\ V_{2y} = (\dot{\theta} r_1 + r_2 \dot{\varphi} \cos\psi) \sin\theta - r_2 \dot{\varphi} \sin\psi \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{2x} = \dot{\theta} r_1 \cos\theta + r_2 \dot{\varphi} \cos(\psi + \theta) = \dot{\theta} r_1 \cos\theta + r_2 \dot{\varphi} \cos\varphi \\ V_{2y} = -\dot{\theta} r_1 \sin\theta + r_2 \dot{\varphi} (-\sin(\psi + \theta)) = -\dot{\theta} r_1 \sin\theta - r_2 \dot{\varphi} \sin\varphi \end{cases}$$

O sea: $$\boxed{\vec{V}_2 = (\dot{\theta} r_1 \cos\theta + r_2 \dot{\varphi} \cos\varphi) \hat{i}_0 - (\dot{\theta} r_1 \sin\theta + r_2 \dot{\varphi} \sin\varphi) \hat{j}_0}$$

Para el cálculo de la aceleración de O_2 respecto a la terna fija se efectúa un cálculo bastante similar al de la velocidad y obteniéndose su valor.