Ecuaciones de Laplace y Poisson.

Lino Spagnolo.

En el análisis del campo eléctrico se han presentado diversas alternativas: si se conoce una distribución de cargas eléctricas se calcula elcampo eléctrico con las leyes de Coulomb o de Gauss; si se conoce el potencial en toda la región el campo eléctrico se calcula con la fórmula $\vec{E} = -\nabla V$.

En la práctica es poco común que se conozcan algunas de esas dos alternativas, es más común conocer las condiciones electrostáticas de cargas o potencial en algunas regiones particulares como el potencial en las placas de un condensandor o el movimiento de una carga (electrones) en el interior de un tubo de alto vacío, etc. Tales condiciones se generalizan llamádolas condiciones de borde o de contorno y también problemas de borde o frontera, y con esos valores se desea hallar el campo $\vec{E}$ y el potencial V en toda la región.

Para este tipo de problemas se utilizan las ecuaciones de Laplace o de Poisson cuyo significado se deduce a partir de la Ley de Gauss para el campo electrostático en medios lineales:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = \rho$$

Y dado que: $\vec{E} = -\nabla V \rightarrow \therefore \; \nabla \cdot \nabla V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$ o $\boxed{\nabla^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}}$

La cual constituye la ecuación de Poisson, mientras que la ecuación de Laplace es para el caso particular de una región sin cargas: $\rho = 0 \rightarrow \therefore \; \boxed{\nabla^2 V = 0}$

Existe un importante teorema denominado Teorema de Unicidad que asegura que una solución de las ecuaciones de Laplace o de Poisson, obtenida por un medio matemático como ser: gráfico, analítico, de elementos finitos, etc. será la solución única y correcta del problema si se contemplaron debidamente las condiciones de contorno. Sin entrar en los detalles de esta prueba, aplicaremos la fórmula de Poisson o Laplace en casos bien específicos para familianizarnos con su uso.

Ejemplo 1.

Consideremos el caso de un capacitor de placas paralelas separadas por una distancia d en la dirección de z y de extensión infinitas en la direcciones x e y.

Las dos placas conductoras, inferior $z=0$ y superior $z=d$ tienen las siguientes condiciones de contorno (o locales): $Para\begin{cases} z=0 & V=0 \\ z=d & V=V_o \end{cases}$

Se desea hallar el potencial y el campo eléctrico en el espacio (o en toda la región).

Solución:

Como ya se dijo a este tipo de problemas se aplica la ecuación de Laplace o de Poisson. Al pedir las condiciones electrostáticas $(\vec{E}\ \ y\ V)$ en el espacio, debempos plantear la ecuación de Laplace pues en la región genérica la carga es nula. Solamente hay cargas en la frontera del capacitor y eso lo consideran las condiciones de contorno. Se trabajará con la sola variable z pues en x el potencial V_o es uniforme.

Por lo cual plantearemos: $\nabla^2 V = 0 \rightarrow \dfrac{d^2V}{dz^2} = 0$

En coordenadas cartesianas. La primera y segunda integral son evidentemente:

$$\frac{dV}{dz} = a \quad y \quad V = az + b$$

siendo a y b dos constantes a determinar con las condiciones de contorno.

$$1 \ \ Para\ z=0\ \ es\ V=0 \quad \therefore \ \ b=0$$

$$2 \ \ Para\ z=d\ \ es\ V=V_o \quad \therefore \ \ a=\frac{V_o}{d}$$

La solución final para el potencial en toda la región es: $\boxed{V=\dfrac{V_o}{d}z}$

Y para el campo eléctrico se tiene: $\boxed{\vec{E} = -\nabla V = -\dfrac{V_o}{d}\hat{e}_z}$

Lo cual significa que el campo eléctrico es constante entre las placas del condensador y con la dirección de las líneas de fuerza que van del potencial mayor o positivo al potencial menor. Por otra parte el potencial en el interior crece linelamente con la distancia z.

Ejemplo 2.

Sea el caso de un tubo TV de alto vacío donde los electrones emitidos desde el cátodo, que se halla a una altisima temperatura, son acelerados hacia el ánodo que se encuentra a un alto potencial V_o respecto al cátodo.

Dadas las condiciones electrostáticas de contorno: $Para\begin{cases} x=0 & V=0 \ Cátodo \\ x=d & V=V_o \ Ánodo \end{cases}$

Hallar el potencial en toda la región.

Solución:

La ecuación diferencial a considerar en la región es la de Poisson ya que la región se halla impregnada de una carga de electrones que viajan del cátodo al ánodo.

$$\frac{d^2V_{(x)}}{dx^2} = -\frac{\rho_{(x)}}{\varepsilon_o}$$

Debido al movimiento de los electrones se debe considerar también la conservación de la energía: $$T+U=0 \ \therefore \ \frac{1}{2}m_e\dot{x}^2 - eV_{(x)} = 0$$

Con la emisión del cátodo en estado estacionario, la corriente de electrones será constante:

A partir de: $\vec{J} = \rho\vec{u} \rightarrow I = -\rho_{(x)}\dot{x}.S$ Con S sección normal de emisión del cátodo.

Reemplazando en la ecuación de Poisson: $\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho_{(x)}}{\varepsilon_o} = \frac{I}{\varepsilon_o S}\cdot\frac{1}{\dot{x}}$

Despejando la velocidad $\dot{x}$ de la conservación de la energía:

$$\dot{x}^2 = \frac{2eV_{(x)}}{m_e} \ \therefore \ \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho_{(x)}}{\varepsilon_o} = \frac{I}{\varepsilon_o S}\sqrt{\frac{m_e}{2e}}\sqrt{\frac{1}{V_{(x)}}}$$

Que puede ponerse en la forma: $$\frac{d^2V_{(x)}}{dx^2}=\frac{K}{\sqrt{2V_{(x)}}}=\frac{dV'}{dx} \quad (V'=\frac{dV}{dx})$$

Operando para su integración:

$$\frac{dV'}{dx}\cdot V'=\frac{K\cdot V'}{\sqrt{2V_{(x)}}} \;\rightarrow\; V'dV'=\frac{K\cdot V'}{\sqrt{2V_{(x)}}}dx=K\frac{dV}{\sqrt{2V_{(x)}}}$$

Integrando: $$\frac{1}{2}(V')^2=K\sqrt{2V} \;\therefore\; \frac{dV}{dx}=\sqrt{2K}\left(2V\right)^{\frac{1}{4}}$$

Volviendo a operar: $$\frac{dV}{dx}=2^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{2}}\left(V\right)^{\frac{1}{4}} \;\rightarrow\; \int_{V_o}^{V_d}\frac{dV}{V^{\frac{1}{4}}}=2^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{2}}\int_0^d dx$$

Integrando nuevamente: $$\frac{4}{3}V_{(d)}^{4/3}=2^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{2}}d$$ o también: $$\boxed{V_{(x)}^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}2^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{2}}x}$$

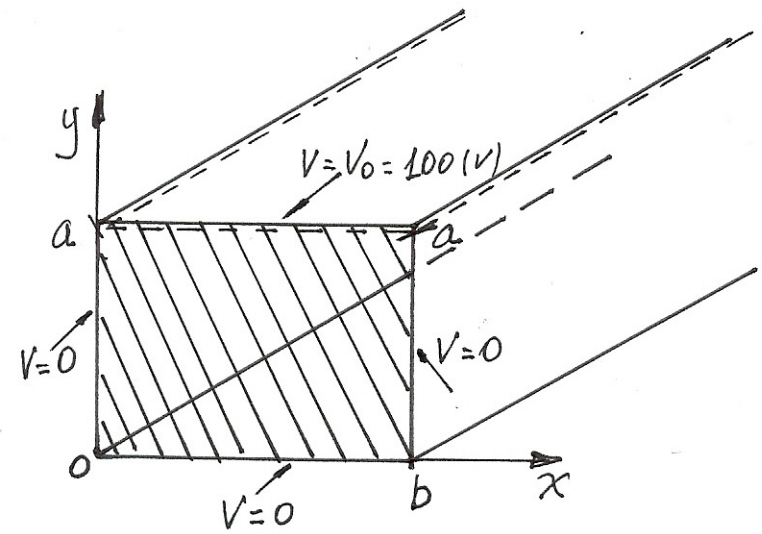
En la práctica suele tomarse: $$\boxed{V_{(x)}=V_o\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{4}{3}}}$$

Derivando dos veces y reemplazando en la ecuación: $$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{I}{\varepsilon_o S}\sqrt{\frac{m_e}{2e}}\sqrt{\frac{1}{V_{(x)}}}$$

Se halla la corriente en el interior del tubo, que constituye la Ley de Child-Langmuir para la emisión del cátodo en los tubos de alto vacío:

$$\boxed{I=\frac{4}{9}\varepsilon_o S\left(\frac{2e}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{V_o}{d^2}}$$

Problema 3. Una caja rectangular metálica está formada por chapas conductoras y de lados con valores a y $b = 2a$ con una longitud L tan grande que puede suponerse infinita.



La tapa superior está separada por un espacio infinitésimo de las paredes a través de un aislante y tiene aplicado un potencial de $V_o = 100\,(V)$ tal como se vé en la figura.

$a.-$ Determinar la función potencial de la región comprendida dentro de la caja.

$b.-$ Para las dimensiones de la caja $b = 2a$ hallar el potencial en el punto:

$$x = \frac{b}{4} \quad e \quad y = \frac{3}{4}a$$

Solución.

$a.-$ Dado que el potencial depende de las coordenadas x e y se aplica la ecuación de Laplace, para dos dimensiones, pues no hay cargas en el espacio interior de la caja.

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

La solución de la ecuación debe hacerse acorde a las condiciones de borde de la caja:

$$\begin{aligned}
&Para\ \ x = 0,\ y\ \ para\ \ 0 \le y \le a, \rightarrow V = 0 \\
&Para\ \ x = b,\ y\ \ para\ \ 0 \le y \le a, \rightarrow V = 0 \\
&Para\ \ y = 0,\ y\ \ para\ \ 0 \le x \le b, \rightarrow V = 0 \\
&Para\ \ y = a,\ y\ \ para\ \ 0 < x < b, \rightarrow V = V_o = 100\,(V)
\end{aligned}$$

En cuanto a la solución de la ecuación diferencial de Laplace se encara con el método de la separación de variables. Se busca una solución a través de una función que sea el producto de dos funciones, una sólo función de x y la otra sólo función de y.

$$V_{(x,y)} = X_{(x)} \cdot Y_{(y)}$$

Reemplazando esta función en la ecuación de Laplace, se obtiene:

$$X''Y + XY'' = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

$$O \ sea: \ -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda \ \therefore \ \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases}$$

La constante λ puede adquirir cualquier valor, pero el único valor con sentido físico es $\lambda > 0$ y en tal caso se hará $\lambda = \beta^2$ para asegurarnos que siempre sea positva.

Reemplazando en la primera ED $X'' + \lambda X = 0$: $\quad (D^2 + \beta^2)X_{(x)} = 0 \quad o \quad DX = \pm j\beta X$

Y cuya solución es la ecuación general compleja: $X_{(x)} = C_o e^{j\beta x} + C_{1o} e^{-j\beta x}$

Utilizando la igualdad de De Moivre:

$$\begin{cases} e^{j\beta x} = \cos(\beta x) + j\sin(\beta x) \\ e^{-j\beta x} = \cos(\beta x) - j\sin(\beta x) \end{cases} \therefore \boxed{X_{(x)} = k_o \cos(\beta x) + k_1 \sin(\beta x)}$$

Donde $k_o = C_o + C_1 \quad y \quad k_1 = j(C_o - C_1)$

De una forma similar, la solución de la otra ecuación diferencial $X'' - \lambda X = 0$ es del mismo formato que la anterior, pero en luagar de ser una función trigonométrica es una función hiperbólica o exponencial:

$$\boxed{Y_{(y)} = h_o CosH(\beta y) + h_1 SinH(\beta y)}$$

O la exponencial: $\boxed{Y_{(y)} = c_o e^{\beta y} + c_1 e^{-\beta y}}$

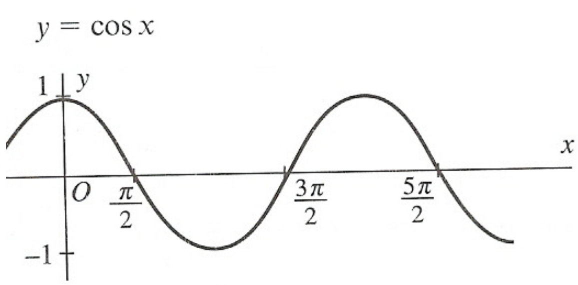
La solución completa es el producto de las dos soluciones;

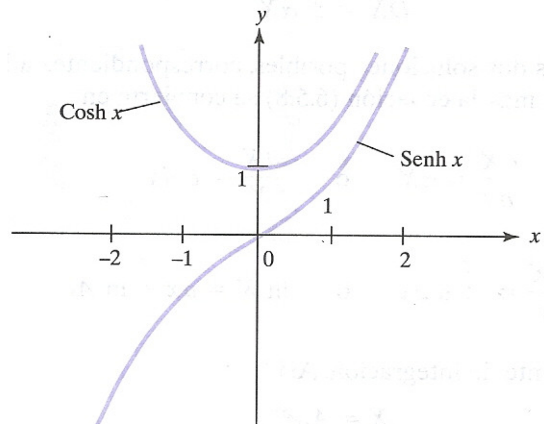
$$V_{(x,y)} = [k_o \cos(\beta x) + k_1 \sin(\beta x)] \cdot [h_o CosH(\beta y) + h_1 SinH(\beta y)]$$

Este resultado debe combinarse con las condiciones de borde para que sea compatible con la realidad del problema: $\begin{cases} Para\ X(x=0) = 0 \quad \therefore \ k_o = 0 \\ Para\ X(x=b) = 0 \quad \therefore \ 0 = 0 + k_1 \sin(\beta b) \end{cases}$

Junto a las condiciones de borde: $\begin{cases} Para\ Y(y=0) = 0 \quad \therefore \ h_o = 0 \\ Para\ Y(y=a) = 0 \quad \therefore \ 0 = 0 + h_1 SinH(\beta a) \end{cases}$ Con lo cual la solución sólo contendrá senos trigonométricos e hiperbólicos, dado que para

$x = 0 \;\; e \;\; y = 0$ la función debe anularse mientras que los dos tipos de cosenos valen $1 \;\; para \;\; x = 0.$ (Ver figura).





Y como $k_1 \neq 0$ y $h_1 \neq 0$ para que exista una solución no trivial, se tendrá que cumplir:

$$\sin(\beta b) = 0 = \sin(\beta\pi) \quad \therefore \quad \boxed{\beta = \frac{n\pi}{b}} \quad con\, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Y la solución general será una suma de una infinita cantidad de términos de la forma:

$$\boxed{V_n(x, y) = k_n h_n \sin(\frac{n\pi}{b} x).SinH(\frac{n\pi}{b} y)}$$

Puesto que β debe ser el mismo valor para ambas funciones, seno trigonométrico y seno hiperbólico.

Así la solución general será la sumatoria: $\boxed{V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{b} x).SinH(\frac{n\pi}{b} y)}$

Debiendo además cumplir con la última condición de borde:

Para todo $x \;\; e \;\; y = a \rightarrow V(x, a) = V_0$

Por lo tanto: $V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{b} x).SinH(\frac{n\pi}{b} a)$

Que constituye un desarrollo en serie de Fourier de V_0. Para solucionar esto conviene multiplicar ambos miembros por $\sin(\frac{m\pi}{b} x)$ e integrar entre $0 < x < b$.

$$\int_0^b V_0 \sin(\frac{m\pi}{b}x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n SinH\,(\frac{n\pi}{b}a)\int_0^b \sin(\frac{m\pi}{b}x)\sin(\frac{n\pi}{b}x)\,dx$$

La última integral tomada entre $0 < x < \pi$ posee la propiedad de las funciones ortogonales como seno y coseno, o sea su integral adquiere los valores enteros:

$$\int_0^{\pi} \sin(\frac{m\pi}{b}x)\sin(\frac{n\pi}{b}x)\,dx = \begin{cases} 0 & si\ m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & si\ m = n \end{cases}$$ Reemplazando en la integral entre $0 < x < b$.

$$\int_0^b V_0 \sin(\frac{m\pi}{b}x)\,dx = C_n SinH\,(\frac{n\pi}{b}a)\int_0^b \sin^2(\frac{n\pi}{b}x)\,dx$$

Integrando:

$$-\frac{b}{n\pi}V_0 \cos(\frac{m\pi}{b}x)\Big|_0^b = C_n SinH\,(\frac{n\pi}{b}a)\frac{1}{2}\int_0^b [1-\cos(\frac{2n\pi}{b}x)]\,dx$$

$$\frac{V_0 b}{n\pi}(1-\cos n\pi) = C_n SinH\,(\frac{n\pi}{b}a)\frac{b}{2}$$

$$C_n SinH\,(\frac{n\pi}{b}a) = \frac{2V_0}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{n\pi} & para\ n = 1;3;5;... \\ 0 & para\ n = 2;4;6;... \end{cases}$$

$$Es\ decir:\ C_n = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{n\pi SinH\,(\frac{n\pi}{b}a)} & para\ n = impar \\ 0 \quad para\ n = par. \end{cases}$$

Reemplazando C_n en la solución general:

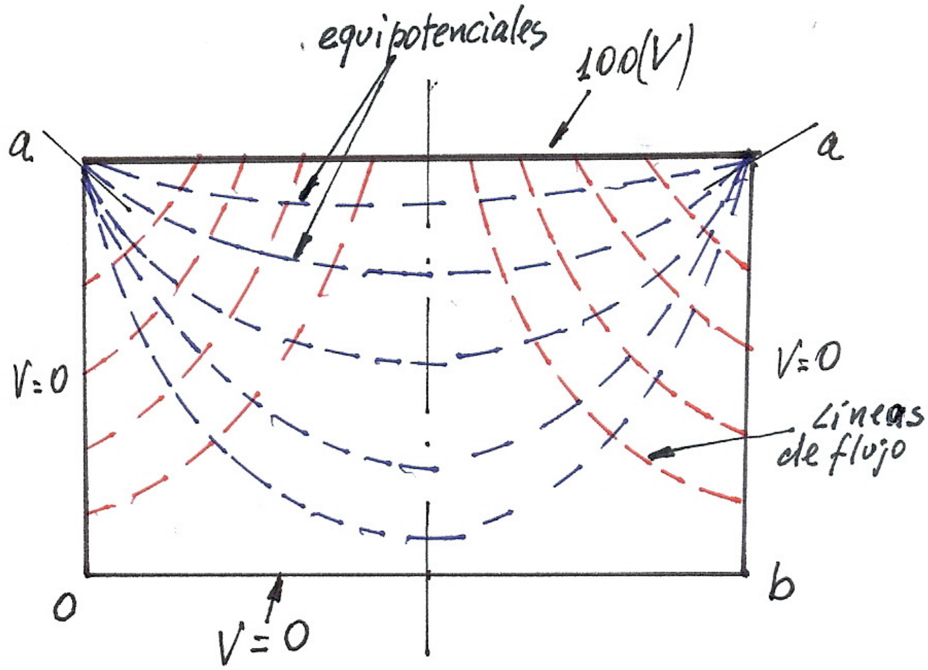
$$\boxed{V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{b}x).SinH\,(\frac{n\pi}{b}y)}{nSinH\,(\frac{n\pi}{b}a)}}$$

La verificación puede hacerse con $x = 0$ el potencial es siempre nulo, para cualquier y.

También para $x = b$ el potencial es siempre nulo, para cualquier y.

Para $y = 0$ es igualmente nulo, para cualquier x.

Para $y = a$ el potencial vale V_0 para cualquier x menos en $x = 0 \;\; y \;\; en \;\; x = b$ en que es nulo.



$b.-$ Potencial en $x = b/4 \;\; e \;\; y = 3a/4$, utilizando la fórmula:

$$V(\frac{b}{4},\frac{3a}{4}) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{4}).SinH(\frac{3n\pi}{8})}{nSinH(\frac{n\pi}{2})} \qquad \text{donde } b = 2a$$

Reemplazando $n \;\; por \;\; 1;3;5;7;9;$ se halla:

$$V(\frac{b}{4},\frac{3a}{4}) = \frac{4V_0}{\pi}(0,4517 + 0,0725 - 0,01985 - 0,00645 + 0,00229) = 0,6374V_0$$

La figura superior ilustra los valores del potencial en el interior del capacitor en forma de caja rectangular.