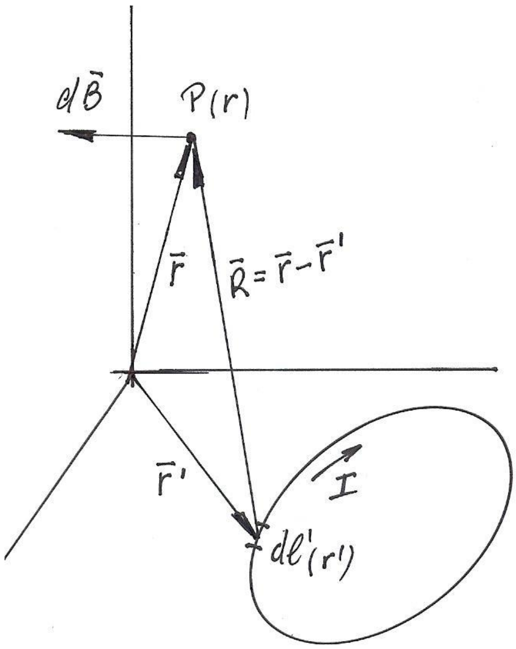
Ecuaciones y Energía del campo magnético. Lino Spagnolo.

A semejanza de la Electrostática, en Magnetostática se tienen las siguientes ecuaciones básicas:

Electrostática	Magnetostática
$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q \quad \nabla\cdot\vec{D} = \rho_v$	$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$
$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \nabla\times\vec{E} = 0$	$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o I = \mu_o \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$ $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla\times\vec{B}\cdot d\vec{S} = \mu_o I$ $Ley\ de\ Ampère\ \nabla\times\vec{B} = \mu_o\vec{J}$
$\vec{E} = -\nabla V;\ V_{(r)} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_l \dfrac{\lambda_{(r')}}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}d\vec{r}\,'$ $V_{(r)} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_S \dfrac{\sigma_{s(r')}}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}dS'$ $V_{(r)} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_v \dfrac{\rho_{v(r')}}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}dv'$	$\nabla\cdot\vec{J} = 0 \quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \ \ \nabla\cdot\vec{A} = 0$ $\nabla\times\vec{J} = 0 \quad \vec{A}_{(r)} = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\int_l \dfrac{I\,d\vec{l}\,'}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}$ $\vec{A}_{(r)} = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\int_S \dfrac{\vec{K}_{(r')}\,dS'}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}$ $\vec{A}_{(r)} = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\int_v \dfrac{\vec{J}_{(r')}\,dv'}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}$

Campo magnético creado por un elemento de corriente en un punto P.
Ley de Biot-Savart.



$$d\vec{H}_{(r)} = \frac{I_{(r')} d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}$$

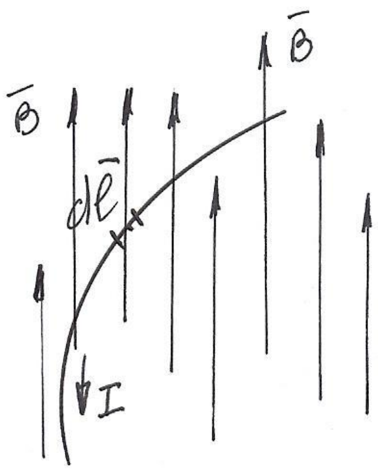
$$d\vec{B}_{(r)} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_{(r')} d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}$$

Si en lugar de un elemento de corriente es una densidad volumétrica de corriente, el campo es:

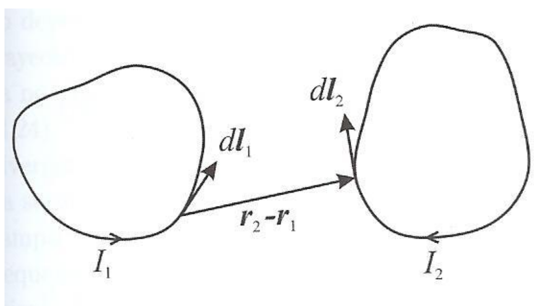
$$\vec{B}_{(r)} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_v \vec{J}_{(r')} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dv'$$

Fuerza sobre un elemento de corriente debido a la presencia de un campo magnético $\vec{B}$.

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$



Fuerza entre elementos de corriente de dos circuitos eléctricos.
Ley de Ampère para las fuerzas.



$$d\vec{F}_2 = \frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2\, d\vec{l}_2 \times \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}$$

Efectuando el doble producto vectorial, queda la integral:

$$\vec{F}_2 = -\frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

La Ley de Ampère puede obtenerse también a partir de la Ley de Biot-Savart, como comprobación de que ambas leyes son complementarias y que pueden usarse una o la otra según mejor convenga en la solución de cada problema.

A partir de la ecuación general del campo creado por una densidad volumétrica de corriente:

$$\vec{B}_{(r)} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_v \vec{J}_{(r')} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} dv'$$

Dado que $\dfrac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\nabla\left(\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$ y llamando $R = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$ podemos escribir:

$$\vec{B}_{(r)} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\int_v \vec{J}_{(r')} \times \nabla(\frac{1}{R}) dv'$$

Teniendo en cuenta la propiedad vectorial del Rotor del producto de una función escalar por otra vectorial: $\nabla\times(\phi\vec{G}) = \phi(\nabla\times\vec{G}) + \nabla\phi\times\vec{G}$

Asimilando que $\vec{G} = \vec{J}_{(r')}$ y $\phi = \dfrac{1}{R}$ queda:

$$-\nabla(\frac{1}{R})\times\vec{J}_{(r')} = \nabla\times\left(\frac{\vec{J}_{(r')}}{R}\right) - \frac{1}{R}\nabla\times\vec{J}_{(r')}$$

Además, para corrientes estacionarias el rotor es nulo, o sea: $\nabla\times\vec{J}_{(r')} = 0$
Por lo tanto el campo será:

$$\vec{B}_{(r)} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_v \nabla\times\frac{\vec{J}_{(r')}}{R} dv' = \nabla\times\frac{\mu_o}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}_{(r')}}{R} dv' \qquad (**)$$

Expresión que es precisamente el potencial vectorial magnético $\vec{A}$.

$$\boxed{\vec{A}_{(r)} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}_{(r')}\, dv'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}} \qquad \therefore \qquad \boxed{\vec{B} = \nabla\times\vec{A}}$$

Debe observarse que la expresión del campo vectorial $\vec{A}$ está definida a menos de una función gradiente, puesto que si definimos un nuevo campo vectorial:

$$\vec{A}_{(r)} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}_{(r')}\,dv'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \nabla\Psi_{(r)}$$

Seguiremos teniendo el mismo campo magnético: $\boxed{\vec{B} = \nabla\times\vec{A}}$
Dado que el rotor del gradiente es nulo.

Si ahora hallamos el rotor de la expresión (**):

$$\nabla\times\vec{B}_{(r)} = \nabla\times\nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_v \nabla\times\nabla\times\frac{\vec{J}_{(r)}}{R}\,dv' = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_v \nabla\times\nabla\times\vec{G}\,dv'$$

Considerando nuevamente la propiedad vectorial:

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \qquad (***)$$

Como se vio, este potencial vectorial está definido a menos de un gradiente. Además, por el teorema de Helmholtz, un campo vectorial como el $\vec{B}$ estará definido si se conocen su rotor y su divergencia.

Como su rotor está definido, su divergencia podemos fijarla con libertad a partir de la ecuación (***). Con ello se fijará una condición a cumplir por el potencial vectorial $\vec{A}$, originalmente llamada condición de Coulomb, pero que posteriormente se vio que este tipo de condiciones aparecería en muchas partes del Electromagnetismo, ya sea clásico como cuántico.

En la teoría de los campos, hay un importante concepto llamado **simetría de Gauge**, que define la propiedad de las ecuaciones que los caracterizan, de no cambiar la naturaleza de los campos si se les aplica una determinada operación a todos los componentes del mismo y en todos los puntos del espacio. Los campos más conocidos con tal propiedad son el gravitatorio y el electromagnético.

Así por ejemplo, si al campo eléctrico definido por $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\Phi$ y al campo magnético definido por $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}$, redefinimos al potencial escalar Φ

mediante la operación: $\Phi(\vec{r};t) \rightarrow \Phi'(\vec{r};t) = \Phi(\vec{r};t) - \frac{\partial F(\vec{r};t)}{\partial t}$

Y redefinimos al potencial: $\vec{A}(\vec{r};t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r};t) + \nabla F(\vec{r};t)$

Se puede verificar que los respectivos campos $\vec{E}\ y\ \vec{H}$ en nada cambiarán, bastando para ello reemplazar los nuevos valores $\Phi'\ y\ \vec{A}'$.. Esta invariancia se define como **Invariancia de Gauge** ante una operación o transformación Gauge.

Cuando se está tratando con campos Gauge como el Electromagnético, y por alguna razón de simplificación matemática de las ecuaciones de campo, resulte conveniente modificar su estructura, siempre se podrá recurrir a una operación Gauge, o condición Gauge, que permita su reacomodamiento, o como ahora se denomina el término: **recalibración de escala**.

Tal condición fija un nuevo dimensionamiento del campo vectorial, siempre con la tendencia de simplificar su expresión. A esto se le denominó **condición de calibración o de escala,** más conocido por **condición de Coulomb**.
(Más adelante se hallará un nueva **condición de calibración o de escala,** conocida como **condición de L. V. Lorenz.)**

En la expresión (***) se fija, como condición de Gauge, que la divergencia del campo potencial vector $\vec{A}$ sea nula: $\therefore$ $\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0}$ A fin de simplificar la expresión.

Por lo cual sólo nos quedará la ecuación: $\boxed{\nabla \times \vec{B}_{(r)} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}}$

O sea, en la forma:

$$\nabla \times \vec{B}_{(r)} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_v \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\vec{J}_{(r)}}{R}\right) dv' = -\frac{\mu_o}{4\pi} \int_v \nabla^2 \left(\frac{\vec{J}_{(r)}}{R}\right) dv'$$

Puede demostrarse que el Laplaciano $\nabla^2 (\frac{1}{R}) = -4\pi\, \delta \vec{R} = -4\pi\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$

Y la expresión de $\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ corresponde a la delta de Dirac, cuya integral se convierte en:

$$-\frac{\mu_o}{4\pi} \int_v \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \vec{J}_{(r')}\right) dv = -\frac{\mu_o}{4\pi} \int_v \vec{J}_{(r')} (-4\pi\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')) dv = \frac{\mu_o}{4\pi} 4\pi\, \vec{J}_{(r')} = \mu_o \vec{J}_{(r')}$$

Con lo cual: $\boxed{\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_v \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \vec{J}_{(r')}\right) dv = -\mu_o \vec{J}_{(r')}}$

Quedando finalmente la integral del rotor como:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J}_{(r')}}$$

Que es la Ley de Ampère en formato de ecuación diferencial.

Energía del campo magnético.

Analizaremos ahora la energía del campo magnético la cual ofrece también varios enfoques de análisis pero sus resultados son más inmediatos y directos que para el campo eléctrico.

Comenzaremos el estudio para el caso simple de un circuito eléctrico con un elemento magnético como el solenoide para analizar el almacenamiento de la energía magnética en ese elemento.

La ecuación del circuito eléctrico para el caso de tensión aplicada constante y una corriente que a partir del instante $t=0$ de la conexión, es: $E_o = RI + L\dfrac{dI}{dt}$

Y la energía eléctrica está dada por:
$$\begin{cases} W = \int_0^T E_o I\,dt = R\int_0^T I^2 dt + L\int_0^T I\,\dfrac{dI}{dt}\,dt \\ W = \dfrac{1}{2}LI_T^2 + R\int_0^T I^2 dt \qquad (01) \end{cases}$$

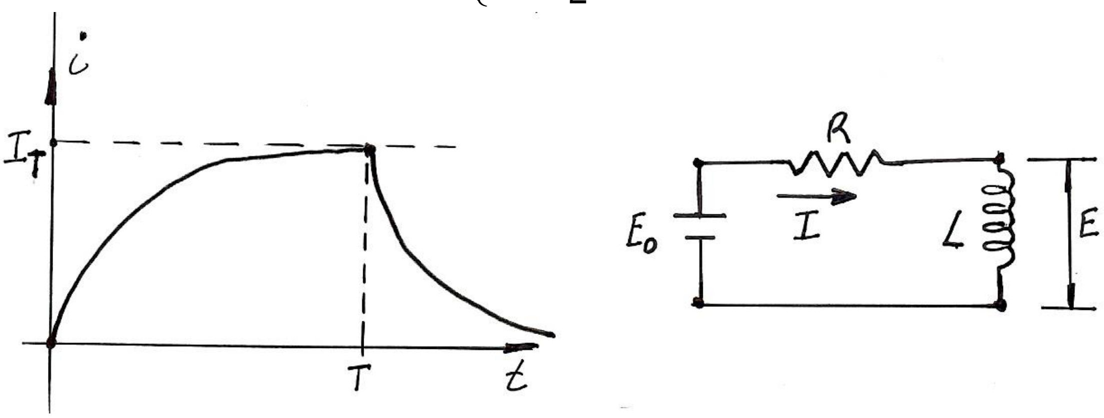


Fig. 1

En la cual el término $R\int_0^T I^2 dt$ es la energía consumida por efecto Joule, mientras que el otro término $W_m = \dfrac{1}{2}LI_T^2$ corresponde a la energía del campo magnético.

Resolviendo la ecuación diferencial de la carga del circuito será:

$$RI + L\frac{dI}{dt} = E_0 \quad y \quad en\ t=0 \begin{cases} I = 0 \\ E_o = Cte. \end{cases}$$

Operando: $$\int_0^I \frac{dI}{(I - \frac{E_o}{R})} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \quad \therefore \quad \boxed{I = I_T(1 - e^{-\frac{R}{L}t})} \qquad (02)$$

En la cual $I_T = E_0 / R$

La energía magnética almacenada en el solenoide es $W_m = \dfrac{1}{2}L\,I_T^2$ (03)

Se le puede dar otro formato ya que para el caso especial de una bobina o inductor con N vueltas, se conocen sus parámetros tales como su inductancia L y el campo magnético $\vec{B}$ generado.
En efecto, para solenoides o bobinas muy largas (longitud l) y de pequeño radio r , su inductancia viene dada por la fórmula:

$L = \mu_o \dfrac{N^2 S}{l}$ $Donde\ S = \pi r^2$ El campo magnético está dado por: $B = \mu_o \dfrac{N I}{l}$

Por lo cual la energía magnética resultará:

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} S\, l = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} vol.\ (J) \qquad (04)$$

En consecuencia la densidad de energía magnética resulta:

$$\boxed{\varpi_m = \frac{B^2}{2\mu_o}\ \left(\frac{J}{m^3}\right)} \qquad (05)$$

Energía Magnética del campo.

Plantearemos ahora el análisis de la energía magnética desde el aspecto de un campo magnético generado por un corriente constante o estacionaria.

Como el elemento magnético más común es la bobina (inductor o solenoide), analicemos el flujo generado por una espira en la cual circula una corriente I.

$$\phi_i = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}_i = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} \qquad con\ \ \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

La fem inducida, según la ecuación de Faraday, es: $fem = V = -\dfrac{d\phi}{dt}$

La energía suministrada por la batería para que circule una corriente I por la espira, es:

$$dW = -V\, I\, dt = I \frac{d\phi}{dt} dt \ \ \therefore \ \ \boxed{dW = I\, d\phi = dW_m} \qquad (06)$$

Esta expresión de la energía será equivalente a la magnética en el caso en que el medio no tenga histéresis ni la espira tenga un movimiento mecánico ya que en tal caso se gastará parte en producir ese movimiento.

Si imaginamos que existen otras espiras adyacentes formando un solenoide con las características antes detalladas, los campos magnéticos generados por cada espira forman un conjunto sumable de valor:

$$dW = \sum_{i=1}^{N} I_i\, d\phi_i = dW_m \qquad (07)$$

Recurriendo al concepto de inductancia mutua de las espiras, la misma se define como:

$$\phi_k = L_k I_k \tag{08}$$

Para cada una de las espiras diferente de la primera.

Con lo cual puede integrarse la energía pero teniendo presente que el cálculo debe efectuarse para la variación de la corriente desde $i = 0 \text{ hasta } i = I$, su valor final. Si en el medio de las espiras no hay histéresis, por lo cual puede asumirse como lineal, la variación de la corriente puede tomarse como lineal (la energía no depende de la forma como se llegue al valor final), es decir:

$$I' = \beta I$$

Y como el flujo es proporcional a la intensidad:

$$d\phi' = \sum_k L_k dI_k' = \sum_k L_k I_k d\beta = \phi\, d\beta \tag{09}$$

$$\int dW = \int \sum_i I_i' d\phi_i' = \int \sum_i I_i \beta \phi_i\, d\beta = \sum_i I_i\, \phi_i \int_0^1 \beta\, d\beta$$

$$\boxed{\int dW = \frac{1}{2} \sum_i I_i\, \phi_i = W_m} \tag{10}$$

Fórmula similar a la obtenida para la energía electrostática: $\boxed{\frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = W_e}$

Con este resultado se **<u>puede hallar la energía magnética en función del campo</u>**:

Por las ecuaciones de Maxwell: $\phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n}\, dS = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}$

Se puede poner:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i\, \phi_i = \frac{1}{2} \sum_i I_i \left[\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} \right] = \frac{1}{2} \oint_l I\, \vec{A} \cdot d\vec{l} \tag{11}$$

Reemplazando $I\, d\vec{l} \text{ por } \vec{J}\, dv$, elemento de volumen:

$$W_m = \frac{1}{2} \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}\, I = \frac{1}{2} \int_v \vec{J} \cdot \vec{A} dv \tag{12}$$

Utilizando la ecuación de Maxwell-Ampère: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_v \vec{J} \cdot \vec{A} dv = \frac{1}{2} \int_v (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{A} dv$$

Y con la propiedad vectorial: $\nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{A}$

Reemplazando:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_v \nabla\cdot(\vec{H}\times\vec{A})\,dv + \frac{1}{2}\int_v \vec{H}\cdot\nabla\times\vec{A}\,dv$$

$$W_m = \frac{1}{2}\oiint_S (\vec{H}\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,dS + \frac{1}{2}\int_v \vec{H}\cdot\vec{B}\,dv \qquad (13)$$

Como la integral es sobre todo el volumen del espacio, la integral de superficie debe extenderse a una esfera con radio tendiente a infinito. Pero en tal caso como los campos $\vec{A}\ y\ \vec{H}$ son proporcionales al producto $\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r^2}$ mientras que la superficie sólo es proporcional a r^2, la integral de superficie tiende a cero.

La última integral se reduce a:

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\int_v \vec{H}\cdot\vec{B}\,dv\ (J)} \qquad (14)$$

Y la densidad de energía magnética será:

$$\boxed{\varpi_m = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{B^2}{2\mu_o} = \frac{1}{2}\mu_o H^2\ \ (\frac{J}{m^3})} \qquad (15)$$

Otra forma sencilla de expresar la Energía Magnética del campo.

Si denominamos Φ_C al flujo magnético total o concatenado a través de una superficie S, y al valor $\Phi_m = \frac{\Phi_C}{N}$ como el flujo magnético correspondiente a una espira, $N=1$, por la ecuación de Faraday-Maxwell se tiene que la fem inducida es:

$$fem = \varepsilon = -\frac{d\Phi_C}{dt} \qquad (16)$$

Además el flujo se relaciona con el vector “densidad de flujo magnético $\vec{B}$” por la fórmula:

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS \qquad (17)$$

Y si el campo $\vec{B}$ es uniforme y constante, como en el interior de una bobina suficientemente larga, entonces:

$$\Phi_C = NBS \quad \therefore \quad \varepsilon = -\frac{d\Phi_C}{dt} = -NS\frac{dB}{dt}\ \ (V). \qquad (18)$$

Por definición, la inductancia mutua de una bobina, o solenoide, recorrida por una corriente uniforme I , vale:

$$L = \frac{\Phi_C}{I} \quad (en\ Hy\ o\ \frac{Wb}{A}) \quad \therefore \boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi_C}{dt} = -L\frac{dI}{dt}} \qquad (19)$$

Por lo cual, la energía definida como:

$$dW = \varepsilon\, I\, dt = L\frac{dI}{dt} I\, dt = L\, I\, dI$$

Integrando:

$$\boxed{W = \int L\, I\, dI = \frac{1}{2} L\, I^2} \qquad (20)$$

Valor de la energía magnética en el interior del solenoide. Como vimos antes, esta energía puede atribuirse al campo magnético existente en su interior.

La fórmula anterior es útil para hallar el valor de la inductancia mutua del solenoide. El valor del campo magnético en su interior se halló como:

$$H = \frac{N}{l} I \quad \text{y como} \quad \varepsilon = -NS\frac{dB}{dt}$$

Con la relación constitutiva $B = \mu H$, reemplazamos:

$$\varepsilon = -NS\mu\frac{dH}{dt} = -\frac{\mu N^2 S}{l}\frac{dI}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

De lo cual:

$$\boxed{L = \frac{\mu N^2 S}{l}} \qquad (21)$$