Convenciones vectoriales y tensoriales cartesianas.

Expresión matricial del vector en un espacio $3D\ y\ 4D,\ con\ n = 3\ o\ 4:$

$$\vec{u} = u_i = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\ o\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}\ (i = 1 \ldots n)$$

Expresión matricial del vector transpuesto en un espacio $3D\ y\ 4D,\ con\ n = 3\ o\ 4:$

$$\vec{u}^T = u_i^T = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}\ (i = 1 \ldots n)$$

Expresión matricial de un tensor de segundo orden en un espacio $3D\ y\ 4D:$

$$A_{i\,j} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\ \ i \to fila;\ j \to columna$$

Expresión matricial de un tensor transpuesto de segundo orden en un espacio $3D\ y\ 4D:$

$$A_{i\,j}^T \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \to A_{j\,i}$$

Producto escalar de un tensor de 2º orden por un vector en un espacio $3D:$

$$Q_{h\,j} \cdot u_j = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}u_1 + q_{12}u_2 + q_{13}u_3 \\ q_{21}u_1 + q_{22}u_2 + q_{23}u_3 \\ q_{31}u_1 + q_{32}u_2 + q_{33}u_3 \end{pmatrix} = v_h$$

Producto escalar de un vector transpuesto por un tensor de 2º orden en un espacio $3D:$

$$u_h^T \cdot Q_{h\,j} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1q_{11} + u_2q_{21} + u_3q_{31} \\ u_1q_{12} + u_2q_{22} + u_3q_{32} \\ u_1q_{13} + u_2q_{23} + u_3q_{33} \end{pmatrix} = v_j$$

Observar el comportamiento de los índices!!

Tensor (o símbolo) de Kronecker. Es un tensor de segundo orden, simétrico e isotrópico, definido por: $\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1\ si\ i = j \\ 0\ si\ i \neq j \end{cases}$

El comportamiento de los índices tienen las siguientes reglas prácticas:

$1.-$ Un índice repetido en un producto indica una suma sobre el mismo.

$$a_k b_k = \sum_{k=1}^{3} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$2.-$ Los índices repetidos con un tensor de Kronecker tienen el siguiente valor:

$$B_{k\,h}\delta_{h\,j} = B_{k\,j}$$

$3.-$ Las siguientes operaciones deben interpretarse tal como se indica.

$$w_k = u_k + v_k = \begin{cases} w_1 = u_1 + v_1 \\ w_2 = u_2 + v_2; \\ w_3 = u_3 + v_3 \end{cases} \quad b_j = a_j + p = \begin{cases} b_1 = a_1 + p \\ b_2 = a_2 + p \\ b_3 = a_3 + p \end{cases}$$

$4.-$ Un índice nunca puede aparecer más de una ves en un producto. Puede aparecer más de 2 veces en sumandos diferentes, pero no es aconsejable. Si no hay más remedio que aparezca más de una vez en un mismo producto, debe reemplazarse todo con un signo de sumatoria.

$$\begin{cases} u_i Q_{h\,i} R_{j\,i} \rightarrow Es\ incrrecto. \\ u_i Q_{h\,i} R_{j\,k} + v_j w_j \rightarrow Correcto,\ no\ aconsejable. \\ u_i Q_{h\,i} R_{j\,k} + v_m w_m \rightarrow Correcto. \end{cases}$$

$5.-$ La delta de Kronecker es muy útil para indicar cuando un tensor es ortogonal.

$$Si\ Q_{h\,j} \cdot Q_{k\,j} = \delta_{h\,k} \rightarrow\ Q \cdot Q^T = 1\ \therefore\ ortogonal.$$

Observar que el producto $Q \cdot Q^T$ debe indicarse como $Q_{h\,j} \cdot Q_{k\,j}$ y no como $Q_{h\,j} \cdot Q_{j\,h}$. Explicar.

Tensor permutación o de Levi-Civita. Es un pseudo tensor de tercer orden, absolutamente antisimétrico e isotrópico, definido por:

$$\varepsilon_{i\,j\,k} = \begin{cases} 1\ si\ la\ \ permutación\ ijk\ es\ \ par \rightarrow 123;\ 231\ o\ 312 \\ -1\ si\ la\ \ permutación\ ijk\ es\ impar \rightarrow 213;\ 132\ o\ 312 \\ 0\ \ si\ hay\ a\lg ún\ índice\ repetido. \end{cases}$$

Producto vectorial: $\vec{u}\times\vec{v}=\varepsilon_{ijk}u_j v_k = w_i = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$

Triple producto mixto: $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=\varepsilon_{ijk}u_i v_j w_k = \alpha = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$

Tensores Cartesianos.

$$\begin{aligned} &Tensor\ rango\ 0 \rightarrow escalar : \alpha \\ &Tensor\ rango\ 1 \rightarrow vector : u_k \\ &Tensor\ rango\ 2 \rightarrow tensor-2 : A_{ij} \\ &Tensor\ rango\ n \rightarrow tensor-n : A_{ij\ldots n} \end{aligned}$$

Ley de transformación vectorial: $u_k^{'} = a_{kj}u_j \quad Inversa:\ u_j = a_{kj}u_k^{'}$

Condición de ortogonalidad: $a_{kj}a_{ij} = \delta_{ki}$

Ley de transformación tensorial: $A_{ik}^{'} = a_{ih}a_{kj}A_{hj} \quad Inversa \quad A_{hj} = a_{ih}a_{kj}A_{ik}^{'}$

Producto tensorial, diádico o externo: $\begin{cases} Q_{jk} = u_j v_k \\ R_{ijk} = A_{ij}u_k \\ S_{ihjk} = A_{ih}B_{jk} \end{cases}$

Producto escalar, interno o contraído: $\begin{cases} \alpha = u_j \cdot v_k \\ w_i = A_{ij}\cdot u_j \\ S_{ih} = A_{ihjk}\cdot B_{jk} \end{cases}$

Tensor simétrico: $Si\ \ T_{ij} = T_{ji} \rightarrow \bar{\bar{T}}\ es\ simétrico = (T_{ij})$

Tensor antisimétrico: $Si\ \ T_{ij} = -T_{ji} \rightarrow \bar{\bar{T}}\ es\ antisimétrico = [T_{ij}]$

Conversión de un tensor $\bar{\bar{T}}$ en simétrico: $(T_{hk}) = \frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji})$

Conversión de un tensor $\bar{\bar{T}}$ en antisimétrico: $[T_{hk}] = \frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji})$

<u>Pseudo vector</u> (o vector axial) obtenido de un tensor antisimétrico.

Es importante el caso del vector axial: **<u>velocidad angular</u>** $\vec{\omega}$.

A partir del tensor antisimétrico: $[\Omega_{jk}] = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$

Se obtiene el vector axial: $\omega_1 = \varepsilon_{ijk}[\Omega_{jk}] = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$

<u>Ejes principales de inercia.</u>

Si $(\overline{\overline{J}})$ es un tensor simétrico al multiplicarlo por un vector unitario $\hat{e}$, tenemos: $J_{jk}\hat{e}_k = \lambda_j \hat{e}_k$

O sea: $(J_{jk} - \lambda U_{jk}) \cdot \hat{e}_k = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} j_{11}-\lambda & j_{12} & j_{13} \\ j_{12} & j_{22}-\lambda & j_{23} \\ j_{13} & j_{23} & j_{33}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} = 0$

El sistema de ecuaciones homogéneas tendrá soluciones no triviales si el determinante de los coeficientes es nulo: $\therefore \begin{vmatrix} j_{11}-\lambda & j_{12} & j_{13} \\ j_{12} & j_{22}-\lambda & j_{23} \\ j_{13} & j_{23} & j_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Cuyo desarrollo es: $\lambda^3 - \mathrm{I}_1\lambda^2 + \mathrm{I}_2\lambda - \mathrm{I}_3 = 0$ Despejándose los 3 valores reales de λ.

Los I_k son los tres invariantes del tensor de segundo orden, con los valores:

$$\mathrm{I}_1 = j_{11} + j_{22} + j_{33} \ (Traza).; \ \mathrm{I}_2 = \begin{vmatrix} j_{22} & j_{23} \\ j_{32} & j_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} j_{11} & j_{13} \\ j_{31} & j_{33} \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{I}_3 = \begin{vmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{12} & j_{22} & j_{23} \\ j_{13} & j_{23} & j_{33} \end{vmatrix} \quad Determinante \ \ del \ \ tensor.$$

Derivadas de vectores y tensores cartesianos.

Las componentes de los vectores u_h y de los tensores A_{jk}, son funciones de las coordenadas x_i. Mientras que los coeficientes de las transformaciones $a_j; b_{jk}; etc.$ No son funciones de las coordenadas.

Derivada de una función escalar: $Si\ \varphi(x_1, x_2, x_3)\ \ función\ escalar:$

$$Gradiente: \nabla\varphi = \varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

$$Laplaciano: \nabla\cdot\nabla\varphi = \varphi_{,ii}$$

Derivada de un vector: $u_{h,i} = \dfrac{\partial u_h}{\partial x_i}$ Esta derivada es el Gradiente de un vector.

La derivada $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i}$ Esta derivada es la Divergencia de un vector.

La derivada $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = u_{i,jj}$ Esta derivada es Laplaciano de un vector.

Derivada de un tensor: $\dfrac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} = T_{jk,i}$;

$$Si\ T'_{ij} = a_{ih} a_{jk} T_{hk}$$

$$T'_{ij,m} = a_{ih} a_{jk} \frac{\partial T_{hk}}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial x'_m} \qquad y\ como: \frac{\partial x_r}{\partial x'_m} = a_{mr}$$

Su derivada es:

$$T'_{ij,m} = a_{ih} a_{jk} a_{mr} \frac{\partial T_{hk}}{\partial x_r} \ \therefore\ \boxed{T'_{ij,m} = \frac{\partial T'_{ij}}{\partial x'_m}}$$