# BOLETÍN MATEMÁTICO

Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada

(10)

OCTUBRE 2005

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

UNIVERSIDAD DE MORÓN

## Autoridades de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

**Decano**
Dr. Jorge Raúl Lemos

**Vicedecano**
Dr. Jorge Emilio Salvel

**Secretario Académico**
Dr. Osvaldo Luis Perillo

**Secretaria Adjunta**
Dra. Amanda Raquel Llistosella

**Directora de Estudios y Coordinación**
Prof. Elvira Venturo

**Consejeros del Honorable Consejo Académico de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales**
Dr. Miguel Gregorio Skubic
Dra. Norma Beatríz Irigoyen
Dr. Raúl Roque Orellano
Lic. Luis Antonio Leo
Dr. Sergio Andrés Ghedin
Dr. Domingo José Mazza

**Representante de Profesores ante el H. C. S.**
Dra. Alicia I. de Montagut de Rodriguez

**Directores de Carrera:**
Dr. Raúl Roque Orellano (Contador Público)
Dr. Miguel Gregorio Skubic (Licenciatura en Administración)
Lic. Enrique Hugo Ventura (Licenciatura en Economía)
Lic. Carlos Alberto Ferreras (Licenciatura en Comercialización / Técnico Superior en Comercialización)
Lic. Guillermo José Garberi(Licenciatura en Recursos Humanos / Analista Universitario en Recursos Humanos)
Lic. Luis Antonio Leo (Licenciatura en Relaciones Públicas / Analista Universitario en Relaciones Públicas)
Dra. Amanda Raquel Llistosella (Licenciatura en Seguros / Técnico Superior en Seguros)
Lic. Marcelo Emilio Mirón(Tecnicatura en Comercialización Minorista)
Lic. Germán Avelino Kraus (Licenciatura en Comercio Internacional)

**Directores de Institutos de Investigación:**
• Instituto de Investigaciones Contables
Dr. Isaac Aizik Senderovich
• Instituto de Investigaciones Económicas
Lic. Jorge Normando Pértica
• Instituto de Investigaciones Administrativas
Dr. Jorge Rumbo
• Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada
Ing. Luinor Edelfio Vilches
• Instituto de Investigaciones Tributarias
Dr. Juan Ferrari Herrero
Subdirector: Dr. Alfredo Destuniano
• Instituto de Metodologia Jurídica Aplicada en las Ciencias Económicas
Dr. Eduardo Mario Favier Dubois
• Instituto de Investigaciones de la Pequeña y Mediana Empresa
Dr. Horacio Armando Irigoyen
• Instituto de Investigaciones de Humanidades y Ciencias Sociales Aplicadas a las Ciencias Económicas y Empresariales
Prof. Elvira Venturo

**Directores de Departamentos Pedagógicos**
• Área Pedagógica de Administración
Dr. Jorge Eduardo Marcos
• Área Pedagógica de Contabilidad
Dr. Jorge Raúl Lemos
Subdirector: Dr. Sergio Daniel Arguissain
• Área Pedagógica de Economía
Dr. Vicente Filleti
• Área Pedagógica de Humanidades
Prof. Elvira Venturo
• Área Pedagógica Jurídica
Dr. Eduardo Mario Favier Dubois
• Área Pedagógica de Matemática
Ing. Martín Adler
• Área Pedagógica de Comercialización
Dr. Fernando Appesseche


**STAFF**

**Director**
Ing. Luinor E. Vilches
lvilches@unimoron.edu.ar
**Redacción**
Profesores de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
**Producido por la Oficina de Medios UM**
**Editor:**
Lic. Alejandro Gavric
**Diseño Grafico:**
DCV. Sandra Luján
**Corrección**
Prof. Susana Lamaison
**Impreso en los Talleres Gráficos UM**
**Año 7 Número 10**
Registro de la Propiedad Intelectual SSN 0329-0255
**Universidad de Morón**
Cabildo 134 (B1708JPD) Morón
(011) 5627-2000 (líneas rotativas)
Fax: 5627-2002
E-mail: webmaster@unimoron.edu.ar
Internet: www.unimoron.edu.ar

Instituto de Investigaciones de Matemática
Aplicada de la Facultad de Ciencias
Económicas y Empresariales de la UM

# BOLETÍN MATEMÁTICO

## ÍNDICE



Las opiniones vertidas en los trabajos que se publican
son de exclusiva responsabilidad de sus autores

# MENSAJE A LOS LECTORES

Reanudamos hoy la publicación de este Boletín Matemático, reafirmando los propósitos enunciados en el primer número y que actualizamos aquí :

Lograr que el mismo sea un vínculo de comunicación de los docentes e investigadores y constituya un espacio de información y de publicación de ideas y temas científicos, que tengan como eje central la investigación matemática y su aplicación en las diversas áreas del conocimiento, principalmente, en temas relacionados con las carreras de nuestra Facultad y con las actividades de las empresas .

Promover entre los docentes y los alumnos la presentación de proyectos de trabajos de investigación en esas áreas .

Alentar la realización de conferencias, reuniones, jornadas, congresos, etc., relacionados con dichos temas, y promover la participación plena de la comunidad universitaria .

En resumen, insistimos en alentar a los docentes y a los alumnos de nuestra Facultad a presentar artículos para su publicación en este Boletín y proyectos de trabajos de investigación relacionados con la matemática aplicada a las áreas mencionadas. Recordemos que la investigación científica es productora de nuevas ideas , que , en nuestro caso, buscamos aplicarla a las ciencias económicas con la finalidad de bregar por una sociedad y un mundo cada vez más favorables y confortables para el desarrollo de la vida humana .

Ing. Luinor E. Vilches
Director del Instituto de Investigaciones
de Matemática Aplicada

Dr. Jorge R. Lemos
Decano de la Facultad de Ciencias
Económicas y Empresariales

# LA EFICIENCIA DE PARETO EN LA PROGRAMACIÓN META

## SU DETECCIÓN POR EL MÉTODO DE TAMIZ Y JONES(*)

Por el Ing. Luinor E. Vilches (**)

**(*)** Basado en el Trabajo de Investigación "La Eficiencia de Pareto en la Programación Meta", desarrollado por el autor en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Morón , con la colaboración del Licenciado Gerardo D. Roozen y la Traductora Francisca J. Martins de Souza (Año 2002)

**(**)** Profesor Titular Extraordinario de Investigación Operativa y Director del Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada (Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Morón).

1.- LAS DECISIONES CON CRITERIOS MÚLTIPLES

Cuando se quiere alcanzar, por ejemplo, el objetivo de una reducción de costos, mediante la modificación de un sistema o de un proceso de producción, se fijan también, en general, otros objetivos, tales como un límite determinado a la inversión a realizar para ello, la disponibilidad de otros recursos necesarios, un límite de tiempo para la puesta en marcha del nuevo proceso, etc.

Para determinar la localización de una planta de producción, se tendrán en cuenta la proximidad del mercado potencial, las ventajas fiscales que pudiere haber, el costo de los terrenos, la existencia de los servicios necesarios, la disponibilidad de la mano de obra requerida, etc.

Se observa, en ambos casos, que se fija, no un único criterio, sino varios, que constituyen objetivos que se busca satisfacer. La decisión a tomar, entonces, es una *decisión multicriterio*.

Milton Friedman [1] señala que, cuando un problema de decisión se establece sobre la base de un solo criterio, no es, en realidad, un verdadero problema de decisión sino un problema tecnológico. Recalca que los problemas económicos de decisión son los que incluyen múltiples criterios.

Por su parte, Milan Zeleny [2] expresa que, desde un punto de vista lógico los problemas tecnológicos son sólo de medición y de búsqueda. Los reales de decisión surgen unicamente cuando se aplican varios criterios para determinar la decisión óptima.

Para la resolución de estos últimos se recurre a paradigmas de decisión multicriterio, sobre la base de las siguientes definiciones:

Atributos : son características que definen las distintas alternativas en un proceso de decisión. Estas características pueden medirse por medio de valores que son independientes de los deseos del *decisor* y que se pueden expresar, generalmente, por una función matemática de las variables de decisión : f(x). Usualmente se utilizan los atributos: beneficio, costo o cantidad de recursos, etc.

Objetivos: un objetivo es el sentido en que se desea la variación de un atributo; es decir , si se requiere la *maximización* o la *minimización* de una función matemática. Por ejemplo, un objetivo puede ser maximizar el beneficio o minimizar el costo o maximizar las ventas, etc.

El objetivo se expresa, por lo general, como:

$$\max z = f(x) \quad , \quad o \quad \min z = f(x)$$

Nivel de aspiración : es un valor que se desea lograr de un atributo, por considerarlo aceptable o satisfactorio, ya que no es posible obtener simultaneamente el valor óptimo de dos o más objetivos, que en general son conflictivos entre sí. Por ejemplo, un problema puede ser aceptable obtener un beneficio de $30 000 (no el óptimo), con un costo aceptable de $5000 (no el óptimo) compatibles con la disponibilidad de recursos. Los valores 30000 y 5000 son los niveles de aspiración para el beneficio y el costo, respectivamente.

Se advierte que, con el concepto de fijación de niveles de aspiración, se abandona la *filosofía optimizante* de la programación lineal, por ejemplo, para adoptar una *filosofía satisfaciente*. Como expresa Herbert Simon [3]: “En las complejas organizaciones actuales, ya sea grandes empresas, organismos gubernamentales, sindicatos, etc., el contexto *decisional* está definido por información incompleta, recursos limitados, multiplicidad de objetivos, conflictos de intereses, etc. En tal contexto, el centro *decisor* no está en condiciones de maximizar nada, y menos una bien definida función de utilidad, como supone el análisis económico tradicional. Por el contrario, el centro decisor intenta que una serie de metas relevantes se aproxime lo más posible a ciertos niveles de aspiración fijados de antemano.”

Meta: es la fijación de un nivel de aspiración a un atributo. Es un valor que se desea lograr, *si es posible*, aunque admitiendo cierta desviación con respecto al mismo. Esa desviación se expresa por medio de una *variable de desviación* o *variable desviacional*, que puede ser *por defecto*, n, o *en exceso*, p. De modo que una meta es:

Meta $\longrightarrow$ Atributo + variables de desviación = nivel de aspiración

Por ejemplo: Beneficio + n – p = $30 000

O: f(x) + n – p = $30 000

La diferencia entre una restricción y una meta es que la primera se debe cumplir estrictamente, mientras que la segunda no.

Criterio: con este término se engloban los conceptos de atributo, objetivo y meta, que son los relevantes en un problema de decisión. En el ejemplo del punto anterior, el atributo es el beneficio f(x); el objetivo es lograr que ese beneficio se aproxime lo más posible al nivel de aspiración de $30 000, minimizando la variable de desviación por defecto *n*, si se parte de valores menores de $30000, o minimizando la variable de desviación en exceso, p, si se parte de valores mayores que $30000 . La meta es el conjunto de la expresión matemática dada :

f(x) + n – p = $30 000

## 2.- LA PROGRAMACIÓN POR OBJETIVOS

El enfoque multicriterio ha llevado al desarrollo de varios métodos. Uno de ellos es la *programación por objetivos o programación meta*, propuesta inicialmente por Charnes, Cooper y Ferguson, en 1955 [4] y ampliada luego por Charnes y Cooper, en 1961 [5]. Con posterioridad, se ha difundido una gran cantidad de trabajos teóricos y de aplicación, principalmente para la resolución de los más variados problemas económicos [6], [7], [8]. Para formular el modelo matemático necesario para aplicar este método, se deben seguir los siguientes pasos:

1) Fijar los atributos relevantes para el problema en análisis.

2) Establecer el nivel de aspiración para cada atributo.
3) Introducir las variables de desviación en cada meta.
4) Definir la función objetivo.

Cada meta, i, se define por medio de la expresión matemática siguiente:

$$f_i(x) + n_i - p_i = t_i \qquad (1)$$

La función objetivo, z, se expresa en función de las variables desviacionales $n_i$ y $p_i$ de las distintas metas. Si se desea alcanzar exactamente el valor del nivel de aspiración de cada meta i, se incluyen en la función objetivo, que se debe minimizar, las dos desviaciones posibles para cada una de ellas:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} (n_i + p_i) \qquad (2)$$

siendo m el número de metas. Si para un determinado problema, es aceptable que resulte para cada meta una desviación por defecto (hacia abajo), o una desviación en exceso (hacia arriba), se suprime $n_i$ o $p_i$ , respectivamente , quedando:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} p_i \qquad (3)$$

o

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} n_1 \qquad (4)$$

Por otra parte, como no pueden existir, para una misma meta, simultaneamente una desviación por defecto y otra en exceso, una de ellas, o las dos, deben ser iguales a cero, de modo que su producto debe ser siempre nulo:

$$n_i \,.\, p_i = 0 \qquad (5)$$

Según las características de las distintas metas, se definen dos modelos básicos de programación meta: el modelo *arquimédico o ponderado* y el modelo *lexicográfico o de metas prioritarias.*

En el modelo ponderado se especifican *ponderaciones o penalizaciones,* $W_i$, a las metas que no se logren, debiéndose minimizar la suma de los productos de las variables desviacionales por sus respectivas ponderaciones:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} W_i(n_i + p_i) \qquad (6)$$

En el modelo lexicográfico , se asigna a las metas un nivel de prioridad de acuerdo con su importancia relativa y se formula una función objetivo para cada nivel de prioridad.

$$\min z_1 = 5n_1 + p_1 + n_2 \ ,$$

$$\min z_2 = n_3 + 2p_3 \ , \ \text{etc.}$$

La optimización consiste en aproximarse a la satisfacción de los distintos niveles de aspiración de las metas, procediendo en forma secuencial: se busca primero la satisfacción de la meta de primera prioridad, luego la de la meta de segunda prioridad, sin que varíe el valor logrado para la primera meta, etc. La satisfacción de las distintas metas puede ser total o parcial .

No obstante la eficiencia del método para obtener la solución del problema con cualquiera de los dos modelos, se ha demostrado que, en ciertos casos , el mismo genera soluciones *no eficientes* o *dominadas*[8], es decir que, en algunos problemas da soluciones *no satisfacientes*. Se practicará la aplicación del método y se verificará la existencia de soluciones no eficientes, en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1

Un frigorífico produce un embutido mezclando tres componentes: A, B y C, más agua. Los contenidos de grasas y proteínas de cada componente, así como sus respectivos costos, se indican en el siguiente cuadro:

| ATRIBUTOS | COMPONENTES | | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C |
| Grasas (kg/kg) | 0,06 | 0,26 | 0,12 |
| Proteínas (kg/kg) | 0,25 | 0,30 | 0,10 |
| Costo ($/kg) | 0,15 | 0,12 | 0,10 |

Se deben fabricar 500 kg de embutido, estableciéndose las siguientes metas, en orden decreciente de importancia:

Meta 1 : el contenido mínimo de proteínas debe ser del 15% .

Meta 2 : el contenido máximo de grasas debe ser del 7% .

Meta 3 : el costo no debe ser mayor de 0,10 $/kg .

Aquí, los atributos son: los contenidos de proteínas y de grasas, en kg. por cada kg de embutido, y el costo, en $ por kg. de embutido. Los niveles de aspiración son: 15% para el contenido de proteínas y 7% para el contenido de grasas, y para el costo, 0,10 $/kg. del producto. Los objetivos son: minimizar la desviación por defecto de la meta 1, minimizar la desviación en exceso de la meta 2, y minimizar la desviación en exceso de la meta 3.

**Formulación del modelo matemático**

**1.- Identificación de las variables**

Se llamarán : $x_1$ a la cantidad del componente A, en kg.
$x_2$ a la cantidad del componente B, en kg.
$x_3$ a la cantidad del componente C, en kg.
$n_i$ y $p_i$ a las desviaciones por defecto y en exceso, respectivamente, de cada meta i.

**2.- Definición de las metas y restricciones**

Proteínas :

$$0{,}25(kg/kg)\ .x_1(kg) + 0{,}30(kg/kg)\ .x_2(kg) + 0{,}10(kg/kg)\ .x_3(kg) \geq 0{,}15\ .\ 500(kg)$$

Grasas :

$$0{,}06(kg/kg)\ .x_1(kg) + 0{,}26(kg/kg)\ .x_2(kg) + 0{,}12(kg/kg)\ .x_3(kg) \geq 0{,}07\ .\ 500(kg)$$

Costo:

$$0{,}15(\$/kg)\ .x_1(kg) + 0{,}12(\$/kg)\ .x_2(kg) + 0{,}10(\$/kg)\ .x_3(kg) \geq 0{,}10(\$/kg)\ .500(kg)$$

Se comprueba que las inecuaciones son homogéneas , por lo que se prescinde de las unidades y se agregan las variables de desviación , resultando las metas :

$0,25x_1 + 0,30x_2 + 0,10x_3 + n_1 - p_1 = 75 \longrightarrow$ (kg de proteínas)
$0,06x_1 + 0,26x_2 + 0,12x_3 + n_2 - p_2 = 35 \longrightarrow$ (kg de grasas)
$0,15x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 + n_3 - p_3 = 50 \longrightarrow$ (\$ de costo)

A estas metas deben agregarse las restricciones de no negatividad :

$$x_1 \ , \ x_2 . \ x_3 \ , \ n_1 \ , \ n_2 \ , \ n_3 \ , \ p_1 \ , \ p_2 \ , \ p_3 \geq 0$$

**3.- Definición de la función objetivo**

Como en las proteínas se establece un mínimo, se debe minimizar la desviación por defecto, $n_1$. En cambio, en las grasas y en el costo se fija un máximo, por lo que se debe minimizar sus desviaciones en exceso, $p_2$ y $p_3$. Se define, entonces, la función objetivo para un modelo ponderado:

$$z = n_1 + p_2 + p_3$$

**4.- Formulación del modelo matemático**

$$\min z = n_1 + p_2 + p_3$$

sujeto a :

1) $0,25x_1 + 0,30x_2 + 0,10x_3 + n_1 - p_1 = 75$
2) $0,06x_1 + 0,26x_2 + 0,12x_3 + n_2 - p_2 = 35$
3) $0,15x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 + n_3 - p_3 = 50$
4) $x_i \ , \ n_i \ , \ p_i \geq 0$

Este modelo está compuesto por un objetivo, 9 variables y 3 metas, más nueve restricciones de no negatividad; aunque debe aclararse que, si se emplean programas de computación para hallar la solución del modelo, las restricciones de no negatividad se establecen en forma genérica o por defecto. La resolución del modelo puede hacerse, por ejemplo , por medio del programa WinQSB, creado por Yih-Long Chang [9], en el que se llaman metas a las que aquí se denominan objetivos, y restricciones a las que en este caso se denominan metas (Estas denominaciones han ido variando con el tiempo, a medida que ha evolucionado el estudio del tema, tendiendo hacia las definiciones que en este trabajo se recogen).

Con el programa mencionado, en Goal Programming, se obtiene, como primera solución:

$$x_1 = 222,84 \ ; \ x_2 = 15,06 \ ; \ x_3 = 147,59 \ ; \ n_1 = p_1 = n_2 = p_2 = n_3 = p_3 = 0 \ ;$$

z = 0, que significa que se alcanzan las tres metas, como puede verificarse reemplazando los valores hallados en las respectivas ecuaciones .

Pero , el mismo programa WinQSB indica que existen soluciones alternativas. Requiriéndolas, se obtiene el conjunto de valores dados en la siguiente tabla:

| Solución | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $n_1$ | $p_1$ | $n_2$ | $p_2$ | $n_3$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 222,84 | 15,06 | 147,59 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 276,73 | 70,35 | 0 | 0 | 1540,88 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 333,33 | 0 | 0 | 0 | 833,33 | 1500 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 300 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1700 | 0 | 500 | 0 |
| 5 | 191,49 | 90,43 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1042,55 | 0 |

Para todas las soluciones es z = 0 y, reemplazando en las ecuaciones de las metas (desde luego, sin las variables de desviación), se obtienen los valores detallados en el siguiente cuadro:

| SOLUCIÓN | PROTEÍNAS 75 kg ≥ | GRASAS 35 kg ≤ | COSTO 50 $ ≤ | EFICIENTE |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 75 | 35 | 50 | NO |
| 2 | 90 | 35 | 50 | SÍ |
| 3 | 83 | 20 | 50 | SÍ |
| 4 | 75 | 18 | 45 | SÍ |
| 5 | 75 | 35 | 40 | SÍ |

Comparando las distintas soluciones, se observa:

• La solución 1 tiene los mismos valores de grasas y de costo que la solución 2, pero menor valor de proteínas. Por lo tanto, es dominada por esta última y no es eficiente.

• La solución 3 de igual costo que la 2, tiene menor contenido de proteínas pero también menor contenido de grasas. No está dominada por ésta y, entonces, es eficiente. Deberá elegirse entre ambas.

• La solución 4 tiene menor contenido de proteínas que la 2 y la 3 pero, también, menor contenido de grasas y menor costo. Se clasifica como eficiente. Deberá elegirse entre las tres.

• La solución 5 tiene igual contenido de proteínas y mayor contenido de grasas que la 4, pero menor costo. Es eficiente. Deberá elegirse entre la 2, la 3, la 4 y la 5.

Se advierte que, de haber adoptado la primera solución, no se habría elegido *la mejor solución*. Por ello es necesario verificar, en cada caso, si la solución hallada es o no dominada por una solución alternativa.

El concepto de *optimalidad* en el campo de las ciencias económicas fue introducido por el economista italiano Vilfredo Pareto, en el año 1896 [10]. En su Teoría del Bienestar, Pareto considera como *estado óptimo* de una comunidad, aquél en que ningún miembro de la misma puede mejorar su situación económica sin que empeore la situación económica de algún otro miembro. Trasladando el concepto a un problema de programación meta , una meta se define como *óptima de Pareto* o *Pareto eficiente*, si no se la puede mejorar sin desmejorar el valor de cualquier otra meta. Por el contrario , una meta se define como *Pareto no eficiente* si se la puede mejorar sin desmejorar el valor de cualquier otra. Además, se define una meta ineficiente como *Pareto ilimitada*, si se la puede mejorar hasta un valor arbitrariamente elevado sin desmejorar otra meta.

En la programación meta lexicográfica, en la que se definen varios objetivos con distintos niveles de prioridad, cualquiera de esos niveles se considera *Pareto eficiente* , si cada meta del mismo es eficiente. En cambio, se lo considera *Pareto no eficiente* si una o más de sus metas son *Pareto no eficiente*; y si una o más de esas metas no eficientes son *Pareto ilimitadas*, el nivel de prioridad se considera *Pareto ilimitado*.

Para un conjunto determinado de metas, los subconjuntos *Pareto eficiente* y *Pareto ineficiente* constituyen un conjunto mutuamente excluyente y exhaustivo. Las metas *Pareto ilimitadas* son un subconjunto del subconjunto *Pareto ineficiente.*

## 3.- DETECCIÓN DEL ESTADO DE PARETO

Para detectar el estado de Pareto de las soluciones de problemas de programación meta se han propuesto varios procedimientos. Uno de ellos, desarrollado por los Profesores Mehrdad Tamiz y Dylan Jones [11], de la Universidad de Portsmouth, Reino Unido, comprende la batería de pruebas que se detalla a continuación .

### 3.1.- EL MÉTODO DE TAMIZ Y JONES

3.1.1.- Clasificación de las metas

Se comienza por clasificar las metas de los problemas de programación meta estándar (modelo ponderado o lexicográfico), de acuerdo con la forma en que se penalizan o ponderan sus variables de desviación en la función objetivo, a saber:

Tipo 1: las metas de las que se penalizan ambas variables *desviacionales* (Ejemplo: min $z = 5n_1 + 3p_1$). En el caso del modelo lexicográfico, esto debe verificarse aún en cada uno de los diferentes niveles de prioridad (Ejemplo: min $z_1 = 3n_1 + 2p_1$ ; min $z_2 = 2n_2 + 2p_2$ ).

Tipo 2: las metas de las que se penalizan solamente las variables *desviacionales* en exceso (Ejemplo: min $z = 4p_1$).

Tipo 3: las metas de las que se penalizan solamente las variables *desviacionales* por defecto (Ejemplo: min $z = 2n_1$).

### 3.1.2.- Batería de pruebas

Prueba A: Verificar si hay metas Tipo 1. Éstas son *Pareto eficientes*, ya que el mejoramiento se produce desde ambos sentidos hacia el nivel de aspiración, sin desmejorar ninguna otra meta.

Prueba B: Verificar si cada meta Tipo 2 y 3 tiene en la solución óptima hallada , una variable desviacional básica ponderada no-cero. En caso afirmativo, la meta es *Pareto eficiente*, ya que el valor óptimo de una variable básica no se puede mejorar sin desmejorar alguna otra meta.

Prueba C: Verificar si alguna de las metas aún no clasificadas posee una variable *desviacional* no ponderada no básica, que se podría introducir en la base sin disminuir el valor de cualquier variable no ponderada básica, ni incrementar el valor de cualquier variable ponderada básica. En tal caso, la meta es no eficiente . Además, si para ingresar esa variable no se encuentra algún elemento pivote apropiado en la columna de las variables no ponderadas, la meta es *Pareto ilimitada.*

Prueba D: Verificar en cada meta todavía no clasificada que posea una variable *desviacional* no ponderada básica, si esa variable se puede incrementar mediante el ingreso a la base de cualquier variable, pero sin producir el incremento de la variable ponderada de otra meta, o el decremento de la variable no ponderada de otra. Si ocurre así, la meta es *Pareto no eficiente* y la solución óptima indica que el valor del nivel de aspiración ya fue excedido, pero puede existir la posibilidad de incrementar aún más el valor de la variable no ponderada, sin desmejorar el valor de otras metas. Para ello se analiza cada columna, buscando variables cuyo ingreso pueda ser aceptable. En primer lugar, como en el caso de las variables no ponderadas no básicas, para que la variable no ponderada básica se incremente, el coeficiente de la fila de la función objetivo debe ser igual a cero. Si se introduce esta variable en la base, el coeficiente en su fila debe ser negativo. Además, para que no disminuya ninguna otra variable no ponderada , el coeficiente en la columna de la variable que ingresa vinculado con sus filas básicas, también debe ser negativo. Toda columna que cumpla con los requisitos mencionados puede introducirse en la base sin desmejorar ninguna otra meta . La meta analizada, entonces, es *Pareto* *no eficiente*. En particular, si esa columna no tiene un pivote conveniente, la meta es *Pareto ilimitada*.

Prueba E: Si aún queda alguna meta sin clasificar, por ejemplo la de orden i, se busca incrementar la variable *desviacional* no ponderada de la misma, VNPi, sin desmejorar alguna otra meta. Para ello, deben seguirse los siguientes pasos:

Paso 1. Imponer los siguientes límites:
- A cada variable ponderada VPj: $VPj \leq VPj^*$, con $j = 1, \ldots, k$
- A cada variable no ponderada VNPj: $VPNj \leq VNPj^*$, con $j = 1, \ldots, k$, $j \neq k$

Los límites VPj* y VNPj* son los valores de las variables *desviacionales* de cada meta de orden j en la solución considerada óptima. Para las variables no básicas, esos valores límite son iguales a cero; para las variables básicas, son los que arroja la solución óptima.

Paso 2. Si una variable no ponderada VNPi es no básica, se intenta ingresarla a la base. Si se lo puede hacer con un valor distinto de cero, la meta es *Pareto no eficiente*. Si, además, no se puede encontrar ningún pivote aceptable, la meta es *Pareto ilimitada*.

Paso 3. Si una variable no ponderada VNPi es básica con valor cero, se intenta incrementar su valor en una de las siguientes condiciones:
a)Se encuentra un pivote que eleva el valor de la variable no ponderada VNPi, de modo que podría realizarse una iteración no degenerada. En tal caso, la meta es *Pareto no eficiente*, terminándose el procedimiento sin necesidad de realizar esa iteración.
b) No se encuentra ningún pivote que permita realizar una iteración no degenerada. Entonces la meta se clasifica como *Pareto eficiente*.

Como puede apreciarse, el procedimiento concluye cuando restan, solamente, iteraciones degeneradas. La prueba E siempre clasifica la meta a la que se aplica, pero es la más compleja. Por ello, los autores del método recomiendan aplicarla en última instancia, siguiendo este algoritmo:

1.- Aplicar las pruebas A y B a cada meta.

2.-Aplicar la prueba C a las metas no clasificadas por las pruebas anteriores, que tengan alguna variable desviacional no ponderada, no básica .

3.-Aplicar la prueba D a cada meta no clasificada por las pruebas anteriores, que tenga una variable desviacional no ponderada básica , para cada variable no básica.

4.-Aplicar la prueba E a cada meta aún no clasificada.

En el trabajo ya mencionado [11], los autores presentan el siguiente ejemplo, que permite aplicar las cinco pruebas:

EJEMPLO 2

Función objetivo: min $z = n_1 + 5n_2 + n_3 + 5n_4 + 5p_4 + p_5$
sujeto a:

$$
\begin{array}{lll}
1) & x_1 + n_1 - p_1 & = 10 \\
2) & x_2 + n_2 - p_2 & = 10 \\
3) & 4x_1 + x_2 + n_3 - p_3 & = 70 \\
4) & 2x_3 + x_4 + n_4 - p_4 & = 25 \\
5) & x_3 + x_4 + n_5 - p_5 & = 10 \\
6) & x_1 + x_2 & \leq 30 \\
7) & x_i, n_i, p_i & \geq 0
\end{array}
$$

Este modelo está compuesto por: una función objetivo, cinco metas (números 1 a 5), una restricción (número 6), más las restricciones de no negatividad (número 7, que incluye 14 restricciones). Para su resolución con el programa WinQSB (Goal programming), es necesario, por exigencias del mismo, cambiar la denominación de las variables de desviación $n_i$ y $p_i$, poniendo, por ejemplo:

$n_1 = x_5$ ; $p_1 = x_6$ , etc. Se obtiene la siguiente Tabla Final del Simplex (abreviada):

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $n_1$ | $p_1$ | $n_2$ | $p_2$ | $n_3$ | $p_3$ | $n_4$ | $p_4$ | $n_5$ | $p_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 0 | 1 | 1 | 5 | 5 | 0 | 1 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.25 | 0,25 | 0,25 | -0,25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $p_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | -0,25 | 0,25 | 0,25 | -0,25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $p_5$ | 1 | 0 | 0 | 0 | -0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | -0,5 | -1 | 1 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | -0,5 | 0 | 0 |
| | $c_j$-$z_j$ | 0 | 0 | 0 | -0,5 | 1 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | 4,5 | 5,5 | 1 | 0 |

Da una primera solución (Solución 1) y dos soluciones alternativas (Solución 2 y Solución 3), que se detallan en la tabla siguiente, donde se registra, para cada solución, el valor de la variable de decisión o desviacional, el costo reducido $c_j$ - $z_j$ y si esa variable es básica o no.

| | | SOLUCIÓN 1 | | | SOLUCIÓN 2 | | | SOLUCIÓN 3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| No. | Variable | Valor | $c_j$-$z_j$ | Estado | Valor | $c_j$-$z_j$ | Estado | Valor | $c_j$-$z_j$ | Estado |
| 1 | $x_1$ | 15 | 0 | Básica | 13,3333 | 0 | Básica | 20 | 0 | Básica |
| 2 | $x_2$ | 10 | 0 | Básica | 16,6667 | 0 | Básica | 10 | 0 | Básica |
| 3 | $x_3$ | 12 | 0 | Básica | 12,5000 | 0 | Básica | 12,5 | 0 | Básica |
| 4 | $x_4$ | 0 | 0,5 | No Básica | 0 | 0,5 | No Básica | 0 | 0,5 | No Básica |
| 5 | $n_1$ | 0 | 1 | No Básica | 0 | 1 | No Básica | 0 | 1 | No Básica |
| 6 | $p_1$ | 5 | 0 | Básica | 3,3333 | 0 | Básica | 10 | 0 | Básica |
| 7 | $n_2$ | 0 | 5 | No Básica | 0 | 5 | No Básica | 0 | 5 | No Básica |
| 8 | $p_2$ | 0 | 0 | No Básica | 6,6667 | 0 | Básica | 0 | 0 | No Básica |
| 9 | $n_3$ | 0 | 1 | No Básica | 0 | 1 | No Básica | 0 | 1 | No Básica |
| 10 | $p_3$ | 0 | 0 | No Básica | 0 | 0 | No Básica | 20 | 0 | Básica. |
| 11 | $n_4$ | 0 | 4,5 | No Básica | 0 | 4,5 | No Básica | 0 | 4,5 | No Básica |
| 12 | $p_4$ | 0 | 5,5 | No Básica | 0 | 5,5 | No Básica | 0 | 5,5 | No Básica |
| 13 | $n_5$ | 0 | 1 | No Básica | 0 | 1 | No Básica | 0 | 1 | No Básica |
| 14 | $p_5$ | 2,5 | 0 | Básica | 2,5 | 0 | Básica | 2,5 | 0 | Básica |
| Función objetivo | | | | 2,5 | | | 2,5 | | | 2,5 |

Se aplica el método de Tamiz y Jones a la primera solución:

Prueba A: Metas con ambas variables *desviacionales* en la función objetivo

Unicamente la meta 4 tiene sus variables *desviacionales*, $n_4$ y $p_4$, en la función objetivo. Luego, la meta 4 es *eficiente.*

Prueba B: Metas con su variable ponderada en la base final.

En la base final de la solución 1, aparecen las variables *desviacionales* $p_1$ y $p_5$, de las cuales la única incluida en la función objetivo es $p_5$, correspondiente a la meta 5, que, por lo tanto es *eficiente*.

Prueba C: Metas con variables *desviacionales* no ponderadas, no básicas

Las variables *desviacionales* no ponderadas (o sea que no aparecen en la función objetivo) son $p_1$, $p_2$, $p_3$ y $n_5$, de las cuales $p_1$ es básica y $n_5$ pertenece a la meta 5, ya clasificada como eficiente. Quedan, solamente, $p_2$ y $p_3$. Si se introduce $p_3$ en la base, como lo hace WinQSB en la Solución 3, con el valor 20, no disminuye el valor de la variable no ponderada básica $p_1$, de la primera solución (por el contrario, aumenta), ni aumenta el valor de la variable ponderada básica $p_5$. Luego, la meta 3 es *no eficiente*.

Prueba D: Metas con variables *desviacionales* no ponderadas básicas, que se puedan incrementar ingresando cualquier variable a la base, sin producir el incremento de cualquier variable ponderada de otra meta, ni disminuir el valor de cualquier otra variable no ponderada de otra meta.

La única variable *desviacional* no ponderada básica es $p_1$, que tiene un valor 5 en la primera solución. Al introducir $p_3$ en la tercera solución , ese valor de $p_1$ se incrementa a 10, sin producir el incremento de la variable ponderada $p_5$, de la meta 5, ni disminuir el valor de ninguna otra variable no ponderada. La meta 1, entonces, es *no eficiente*.

Prueba E: Metas con variable *desviacional* no ponderada que se pueda incrementar sin desmejorar ninguna otra meta.

Queda, aún, sin clasificar, la meta 2, cuya variable *desviacional* no ponderada es $p_2$.

<u>Paso 1 - Límites</u>

Para las variables ponderadas no básicas : $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = p_4 = 0$

Para las variables ponderadas básicas : $p_5^* = 2,5$ ; $p_5 \leq 2,5$

Para las variables no ponderadas no básicas : $p_2 = p_3 = n_5 = 0$

Para las variables no ponderadas básicas : $p_1^* = 5$ ; $p_1 \geq 5$

Paso 2 - Las variables no ponderadas no básicas son $p_2 = p_3 = n_5 = 0$

La solución 2 introduce la variable *desviacional* $p_2$ con el valor 6,6667, que hace salir del límite a la variable $p_1$ (disminuye a 3,3333). Por lo tanto, la meta 2 es eficiente.

En resumen, resultaron: Meta 1: no eficiente
Meta 2: eficiente
Meta 3: no eficiente
Meta 4: eficiente
Meta 5: eficiente

Este ejemplo, además de servir para ver la aplicación concreta del método de Tamiz y Jones, permite observar que, con la utilización del programa WinQSB (Goal programming) se simplifica la aplicación de las Pruebas C, D y E de dicho método. En efecto, al hallar la primera solución, el programa indica si hay soluciones alternativas y las proporciona. Esas soluciones alternativas dan respuesta a las pruebas mencionadas: la solución 3 introduce a $p_3$, observándose que $p_1$ no disminuye, con lo cual se da respuesta a las pruebas C y D, y la solución 2 introduce a $p_2$, satisfaciendo los requerimientos de la prueba E. No obstante, en la resolución de problemas muy complejos, con muchas variables, metas y restricciones, deben revisarse con mucho cuidado las soluciones dadas por el mencionado programa.

**BIBIOGRAFÍA**

[1] – FRIEDMAN , Milton: *Teoría de los precios*, Alianza Universidad Textos, Madrid, España,1962.
[2] – ZELENY, Milan: *The pros and cons of goal programming. Computers Operations Research*, Vol. 8, págs. 357-359, 1981.
[3] – SIMON, Herbert A.:*Models of man,* John Wiley & Sons, New York, USA, 1995.
[4] – CHARNES, COOPER y FERGUSON: *Optimal estimation of executive compensation by lineal programming Management Science*, págs. 138-151, 1955.
[5] – CHARNES y COOPER: *Management models and industrial applications of linear programming*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1961.
[6] – LEE, Sand M.: *Goal Programming for decision analysis*, Auerbach, Philadelphia, USA, 1976.
[7] – IJIRI, Y.: *Management goals and accounting for control*, North Holland, Amsterdam, Holanda, 1965.
[8] – VILCHES, Luinor E.: *La programación con metas múltiples: su aplicación a la resolución de problemas de economía,* Universidad de Morón, Morón, R. Argentina, 1999.
[9] – YIH-LONG CHANG: *WinQSB,* John Wiley & Sons, New York, USA, 1998.
[10] – PARETO, Vilfredo: *Course d 'economie politique*, Rouge, Lausannes Bélgica, 1896.
[11] – TAMIZ y JONES: *Goal programming and Pareto efficiency, Journal of Information & Optimization Science*, Vol. 17, No. 2, págs. 291 – 307, 1996.

# PROGRAMACIÓN LINEAL

## MÉTODO SIMPLEX(*)

### *Significado económico de los elementos del tableau final*

Por el Comp. Cient. Santiago Ferrari (*)

**(*)** Computador Científico, UBA. Profesor Adjunto en UM y UNIaM.

A pesar de los muchos años transcurridos desde que se anunció que había sido superado el viejo método "simplex", al día de la fecha, el algoritmo ideado por George Dantzig con la colaboración de Leonid Hurwicz en el verano (boreal) de 1947 [1], goza de excelente salud, como puede comprobar cualquiera que consulte la literatura actual sobre *Programación Lineal*.

¿Cuál es la razón de esta vigencia?

Si bien existen algoritmos para resolver el Problema de Programación Lineal más eficientes, i.e., más veloces, si bien abundan programas de P.C que brindan no sólo la solución óptima sino también algún análisis rudimentario de *post-optimalidad*, hay dos motivos por los cuales, ni unos ni otros han desplazado al Simplex como el método natural de la Programación Lineal.

El primero de ellos es su enorme simplicidad y su relación directa con la teoría de la Programación Lineal. El segundo y más importante es la cantidad sorprendente de información económica útil que brinda el tableau final del método. Concretamente, todos los elementos de la tabla final son indicadores que sirven para la toma de decisiones.

Ilustraremos lo afirmado mediante un ejemplo sencillo. El concepto es idéntico cualquiera sea la dimensión del problema.

La Compañía Enlatadora del Sur tiene un contrato según el cual recibirá 20 toneladas de tomates maduros a $ 0,15 el kg con los cuales producirá jugo de tomate (JT), puré de tomate (PT) y tomate al natural (TN). Los productos enlatados se empacan en cajas de 24 latas cada una. Una lata de JT requiere 0,8 kg de tomates maduros, en tanto que una lata de PT requiere 0,43 kg y una lata de TN requiere solamente 0,31 kg. La participación de la compañía en el mercado está limitada a 1000 cajas de jugo, 3000 cajas de PT y 2500 cajas de TN. Los precios al por mayor son $18, $9 y $7 por caja de JT, PT y TN respectivamente. Determinar el programa de producción óptimo de la compañía [2].

El modelo lineal correspondiente será, por lo tanto:

$$\text{Maximizar } z = 0{,}63x_1 + 0{,}31x_2 + 0{,}25\,x_3 \ ^{(*)}$$

sujetas a

$$\begin{array}{llllllll} 0{,}8x_1 & + 0{,}43x_2 & + 0{,}31x_3 & + x_4 & & & & = 20\,000 \\ x_1 & & & & + x_5 & & & = 24\,000 \\ & x_2 & & & & + x_6 & & = 72\,000 \\ & & x_3 & & & & + x_7 & = 60\,000 \end{array} \qquad (1)$$

$$\text{y} \qquad x_j \geq 0 \ ; \ j=1,\ldots,7$$

(*) El *beneficio neto unitario* del JT se ha calculado como: $c_1$ = 18$ por caja / 24 latas por caja – 0,8 kg. por lata •. 0,15 $ por kg. = 0,63 $ por lata ya que el enunciado no proporciona otros datos. En forma análoga se calculan $c_2$ y $c_3$.

con $x_1$, $x_2$ y $x_3$ cantidad a producir de latas de JT, PT y TN respectivamente
$x_4$: cantidad de tomates maduros sobrantes [kg]
$x_5$, $x_6$ y $x_7$ demanda potencial no satisfecha de JT, PT y TN respectivamente [latas];

de manera que tenemos

número de variables reales = cantidad de productos = 3
número de variables de holgura (slack) = cantidad de restricciones = 4
número total de variables = n = 7

Multiplicando los $c_j$ por 100 para no trabajar con más de dos decimales, resultan las siguientes tablas inicial y final del algoritmo simplex.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,8 | 0,43 | 0,31 | 1 | 0 | 0 | 0 | 20000 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 24000 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 72000 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 60000 |
| 63 | 31 | 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabla inicial de simplex

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 60000 |
| 1 | 0,54 | 0 | 1,25 | 0 | 0 | –0,39 | 1750 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 72000 |
| 0 | -0,54 | 0 | -1,25 | 1 | 0 | 0,39 | 22250 |
| 0 | -2,86 | 0 | -78,75 | 0 | 0 | -0,59 | 1610250 |

Tabla final de simplex

A fin de facilitar la extracción de información económica se puede ampliar la tabla anterior obteniendo [3]:

| | | 63 | 31 | 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cº | X | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | B |
| 25 | $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 60000 |
| 63 | $x_1$ | 1 | 0,54 | 0 | 1,25 | 0 | 0 | –0,39 | 1750 |
| 0 | $x_6$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 ` | 72000 |
| 0 | $x_5$ | 0 | -0,54 | 0 | -1,25 | 1 | 0 | 0,39 | 22250 |
| | | 63 | 33,86 | 25 | 78,75 | 0 | 0 | 0,59 | 1610250 |
| | | 0 | 2,86 | 0 | -78,75 | 0 | 0 | -0,59 | |

Tabla final de simplex ampliada

Ahora aparece: una fila adicional superior con todos los coeficientes de la función objetivo; dos columnas a la izquierda rotuladas respectivamente Cº y X, que facilitan la lectura de las *variables básicas* e incluyen sus respectivos coeficientes en la función objetivo; y una penúltima fila con los valores de $z_j$.

Dado que se cumple:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c^o_i \quad a_{ij} \qquad (j = 1,\ldots,n) \qquad (2)$$

$$z = \sum_{i=1}^{m} c^o_i \, . \, b_i$$

$$\bar{c}_j = c_j - z_j \qquad (j= 1,\ldots,n)$$

resulta que en la tabla ampliada se verifica:

i) la penúltima fila se obtiene haciendo el producto matricial entre la transpuesta de la columna C º y la matriz a su derecha ( A|B )

ii) la última fila, que contiene los indicadores de *optimalidad*, es la diferencia entre la primera y la penúltima (excluído de ésta su último elemento que es el valor óptimo de z)

1. **Análisis de las columnas correspondientes a variables reales**

La información obvia que resulta de la tabla final es que el máximo beneficio, que es z = 16.102,5, se obtiene produciendo $x_1$= 1.750 latas (73 cajas) de JT, $x_3$ = 60.000 latas (2.500 cajas) de TN y dejando una demanda potencial insatisfecha de $x_5$ = 22.250 latas de JT y las $x_6$ = 72.000 latas de PT.

Las restantes n – m = 3 variables del problema se anulan al ser la óptima una *solución básica* (un *punto extremo* del convexo de soluciones). En este caso, $x_2$ (latas de PT), $x_4$ (sobrante de tomate maduro) y $x_7$ (demanda potencial de TN insatisfecha) son nulas.

Desde el punto de vista económico, que el valor óptimo de $x_2$ sea nulo nos está indicando que, dada la relación del beneficio unitario del PT respecto de los beneficios unitarios de JT y TN, y la relación entre el consumo de recursos (en este caso sencillo, sólo tomate maduro) del PT respecto del consumo de recursos por parte de JT y TN, es más rentable no vender PT a los efectos de que con los recursos que insumiría se pueda producir más de los otros productos.

Para determinar la magnitud de esta conveniencia, o lo que es lo mismo, el *costo de oportunidad* de no actuar optimamente, analizaremos las ecuaciones implícitas en el *tableau final*. Por ejemplo, la segunda ecuación nos dice:

$$x_1 + 0{,}54x_2 + 1{,}25x_4 - 0{,}39x_7 = 1750$$

es decir:

$$x_1 = 1750 - 0{,}54x_2 - 1{,}25x_4 + 0{,}39x_7$$

Ahora bien, $x_2$, $x_4$ y $x_7$ son variables no básicas y por lo tanto deben ser nulas para obtener una solución óptima. Sin embargo, si nos interesa calcular el costo de oportunidad del PT, podemos eliminar en todas las ecuaciones las variables no básicas excepto $x_2$. Resulta, entonces:

$$\begin{aligned} x_3' &= 60000 - 0x_2 \\ x_1' &= 1750 - 0{,}54x_2 \\ x_6' &= 72000 - 1x_2 \\ x_5' &= 22250 + 0{,}54x_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

Resulta evidente, entonces, que la columna 2 de la tabla óptima nos está indicando cómo varían los valores de las variables básicas por cada unidad que se quiera producir de PT.

Y, en general, que

*Sea $x_j$ una variable real no básica, entonces el elemento $a_{ij}$ de la tabla óptima representa la disminución (si $a_{ij} > 0$) o aumento (si $a_{ij} < 0$) de la variable que se encuentra en la fila i cuando la variable $x_j$ toma el valor 1 (en lugar del valor óptimo 0)* **.**

De lo anterior, y de acuerdo con la ecuación ( 2 ), resulta el siguiente corolario:

*Si $x_j$ es una variable real no básica, entonces $\mathbf{z}_j$ es el decremento, indirecto, del beneficio por cada unidad a producir del producto j (que no conviene fabricar).*

Dado que, por otro lado, cada unidad del producto j aporta $c_j$ unidades de beneficio *directo*, el balance final de la pérdida será:

( ** ) Obsérvese que $\bar{c}_j \leq 0$ para todo j en la tabla final de un problema de máximo.

$$\bar{c}_j = c_j - z_j \;^{(**)} \qquad (4)$$

Quedó demostrado, entonces, que:

$\bar{c}_j$ *es el costo de oportunidad del producto j* ,

es decir, *el decremento de beneficio por cada unidad que se fabrique del producto j.*

Por otra parte, si se desea que el balance mencionado en ( 4 ) sea positivo, será necesario que el beneficio del producto j sea aumentado en, por lo menos, el valor absoluto del miembro izquierdo. De donde surge su segundo significado de los "c raya":

**-** $\bar{c_j}$ *es lo que debe aumentar $c_j$ para que convenga fabricar el producto j.*

## 2. Análisis de las columnas correspondientes a variables slack

El análisis anterior no tiene sentido cuando $x_j$ es una variable de holgura ya que no parece razonable quitarles recursos a los productos que están dando beneficios con el solo objetivo de que sobre recurso. Sin embargo, su columna en el ***tableau final*** juega un papel igualmente importante.

Por consiguiente, si se quiere estudiar el efecto de ***aumentar la disponibilidad de un recurso saturado***, la tabla óptima permite hacerlo sin necesidad de resolver desde el comienzo el problema modificado. Esto es así porque la tabla final se obtiene a partir de la tabla inicial pre-multiplicándola por la llamada ***matriz inversa óptima*** $\Gamma$.

Concretamente nuestra solución óptima cumple:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_6 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60000 \\ 1750 \\ 72000 \\ 22250 \end{bmatrix} = \quad . \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1,25 & 0 & 0 & -0,39 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1,25 & 1 & 0 & 0,39 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 20000 \\ 24000 \\ 72000 \\ 60000 \end{bmatrix}$$

**Si a las 20 toneladas del recurso "tomate maduro" le agregamos una cantidad $\delta$ (en kg), tendremos un B' y, por lo tanto, un X', que serán:**

$$X' = \Gamma.B' = \Gamma . \begin{bmatrix} 20000+\delta \\ 24000 \\ 72000 \\ 60000 \end{bmatrix} = \Gamma . \left\{ \begin{bmatrix} 20000 \\ 24000 \\ 72000 \\ 60000 \end{bmatrix} + \delta . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \Gamma .B + \delta . \Gamma . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_6 \\ x_5 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 \\ 1,25 \\ 0 \\ -1,25 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

De donde resulta que *la columna 4 de la tabla final nos está indicando cuánto aumenta (o disminuye) cada variable básica cuando aumentamos una unidad del recurso 1.*

La ley general es:

*Sea $x_j$ una variable de holgura. Entonces el elemento $a_{ij}$ de la tabla óptima representa el incremento (si $a_{ij} > 0$) o decremento (si $a_{ij} < 0$) de la variable que se encuentra en la fila i cuando el recurso asociado a la variable $x_j$ se incrementa en una unidad ( *** ).*

Si en lugar de una variable de holgura se trata de una *de exceso,* esto es, la variable que se agrega cuando la restricción es de $\geq$ , se debe permutar la palabra *incremento* por *decremento* y viceversa.

( *** ) Obsérvese que, en este caso, a diferencia del anterior, la ley no se restringe a variables no básicas. Efectivamente, si la variable $x_j$ es *básica* su columna será canónica, es decir un 1 en su fila y 0 en el resto, de manera que, de acuerdo con la ley, aumenta una unidad la variable que está en la fila i (¡que es $x_j$!) y las demás no se modifican. Por otra parte, si $x_j$ es básica significa que su recurso asociado no está saturado: si se aumenta una unidad del mismo sólo aumenta el sobrante de ese recurso y todas las demás magnitudes permanecen invariables.

Nuevamente, de acuerdo con la ecuación ( 2 ), resulta el siguiente corolario:

*Si $x_j$ es una variable de holgura, entonces $z_j$ es el incremento de beneficio por cada unidad que se agregue del recurso asociado a la variable $x_j$*

Cuando el $c_j$ sea nulo, cosa que ocurre normalmente en las variables de holgura, también será cierto lo siguiente:

$-\overline{c_j}$ *es el valor marginal del recurso asociado con la variable de holgura $x_j$*

Si j es una columna canónica, i.e., $x_j$ es una variable básica, y teniendo en cuenta la nota ( *** ), se llega por otro camino la propiedad trivial: "Si un recurso no está saturado, su valor marginal es cero."

3. **Observación:**

La validez de las leyes ( 3 ) y ( 5 ) está restringida a ciertos intervalos. El cálculo de los extremos de esos intervalos es muy elemental: surge inmediatamente de la condición de factibilidad de la solución modificada (X' 0) en dichas ecuaciones . Fuera de esos intervalos valen otras fórmulas que se obtienen realizando una operación de pivoteo sobre la tabla final.

4. **Aplicación:**

Para finalizar, verificaremos las propiedades arriba deducidas en nuestro trivial ejemplo.

4.1 Supongamos que se desean producir 1.000 latas de PT. Podemos aplicar las fórmulas deducidas ya que este valor se encuentra dentro de su intervalo de validez que es $0 \leq x_2 \leq 3255{,}8$. Luego, de acuerdo con ( 3 ), tendremos:

$$x_3' = x_3 = 6000$$
$$x_1' = x_1 - 0{,}5375 \cdot 1000 = 1212{,}5$$
$$x_6' = x_6 - 1 \cdot 1000 = 71000$$
$$x_5' = x_5 + 0{,}5375 \cdot 1000 = 22787{,}5$$

que, como se puede comprobar fácilmente, cumplen las ecuaciones en ( 1 ). Por otra parte, observamos que para poder producir estas 1.000 latas de PT debemos disminuir la cantidad de latas de JT.

Nuevo beneficio = z' = 1212,5 . 0,63 + 1000 . 0,31 + 60000 . 0,25 = 16073,875

Decremento del beneficio $\Delta z = z - z' = -28{,}625$

Ése, efectivamente, es el costo de oportunidad de producir 1000 latas según la fórmula:

Costo de oportunidad = $\overline{c_2}$ . 1000 = –0,028625 1000

4.2 Analicemos ahora el efecto que produciría aumentar nuestro recurso "tomate maduro". Dado que el intervalo de validez de la tabla óptima actual es:

$$-1400 \leq \Delta b_1 \leq 17800$$

tomemos un incremento del recurso de, por ejemplo, $\Delta b1$ = 10.000 kg. La nueva solución será:

$$\begin{aligned} x3' &= x3 &&= 60000 \\ x1' &= x1 + 1{,}25 \cdot 10000 &&= 14250 \\ x6' &= x6 &&= 72000 \\ x5' &= x5 - 1{,}25 \cdot 10000 &&= 9750 \end{aligned}$$

Estos valores satisfacen las ecuaciones de ( 1 ) modificadas al reemplazar b1 = 20000 por b1' = 30000. Observamos, además, que todo el incremento del recurso es absorbido por el producto 1 (JT) : lógico porque el TN está acotado por su participación en el mercado.

Nuevo beneficio = 14250 . 0,63 + 60000 . 0,25 = 23977,5

Incremento del beneficio $\Delta z = z' - z = 23977{,}5 - 16102{,}5 = 7875$

A idéntico resultado se llega empleando el valor marginal:

$$\Delta z = -\overline{c4} \, . \, \Delta b1 = 0{,}7875 \, . \, 10000 = 7875$$

4.3 Si bien las restantes restricciones del problema no corresponden a recursos, puede resultar interesante aplicarles a ellas el procedimiento anterior. Lo haremos en la última que es la única *saturada* y que tiene como variable slack asociada a $x_7$. Dado que el intervalo de validez de la tabla óptima actual es:

$$-57419{,}35 \leq \Delta b_4 \leq 4516{,}13 \qquad (6)$$

analicemos, pues, qué pasaría si la participación en el mercado del TN fuera de 64.000 latas (un incremento de 4.000):

La nueva solución será:

$$\begin{aligned} x3' &= x3 + 4000 \, . \, 1 &&= 64000 \\ x1' &= x1 - 4000 \, . \, 0{,}3875 &&= 200 \\ x6' &= x6 &&= 72000 \\ x5' &= x5 + 4000 \cdot 0{,}3875 &&= 23800 \end{aligned}$$

Estos valores satisfacen las ecuaciones de ( 1 ) modificadas al reemplazar $b_4$ = 60000 por $b_4'$ = 64000.

Observamos que el TN aumenta en desmedro del JT. De hecho, si tomáramos el valor máximo posible de $\Delta b_4$ en ( 6 ), cesaría la producción de JT. Más allá de ese valor no tendría sentido aumentar su participación en el mercado, pues la producción estaría acotada por el recurso "tomate maduro" (que se estaría empleando en su totalidad para TN). Esto se refllejaría en la tabla óptima por medio de un valor marginal nulo de la participación en el mercado de TN ($z_7$=0) que surgiría después de hacer la transformación de Gauss-Jordan con pivote en $a_{27}$.

Nuevo beneficio = 200 . 0,63 + 64000 . 0,25 = 16126

Incremento del beneficio $\Delta z = z' - z = 16126 - 16102{,}5 = 23{,}5$

A idéntico resultado se llega empleando el valor marginal:

$$\Delta z = -\bar{c}_7 \, . \, \Delta b4 = 0{,}005875 \, . \, 4000 = 23{,}5$$

Como observación final y complementaria, destaquemos la notoria diferencia de magnitudes entre los valores marginales analizados en 4.2 y 4.3. Esto, para los datos de este problema, da una clara idea del *valor* de la restricción del tomate maduro respecto del *valor* de la participación en el mercado del TN.

**BIBLIOGRAFÍA**

[ 1 ] DANTZIG, George Bernard: *Linear Programming and extensions*, Princeton University Press, 1963.

[ 2 ] TAHA, Hamdy A.: *Investigación de Operaciones*, Alfaomega, 1995.

[ 3 ] GASS, Saúl I.: *Programación Lineal, Métodos y Aplicaciones*, CECSA, 1972.

[ 4 ] MARIN, I., PALMA, R., LARA C.: *La Programación Lineal en el Proceso de Decisión*, Ediciones Macchi, 1974.

# CÁLCULO DEL lim $\frac{\text{sen } x}{x}$ para $x \to 0$

## SIN RECURRIR A INTEGRACIONES AD HOC

Por el Lic.Juan Carlos López (*)

**(*)** Profesor de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Morón

### INTRODUCCIÓN

Para calcular el $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x}$ (1)

se utiliza, usualmente , una comparación entre áreas de triángulos y el área de un sector circular. Pero el cálculo del área de un sector circular sólo puede hacerse por integración, por ser curvo uno de sus lados y, si bien el procedimiento geométrico y el paso al límite utilizados parecen impecables, creemos desprolijo el no utilizar el recurso de la integración como inversa de la derivada. Con este recurso, el cálculo del límite (1) quedaría totalmente dentro del cálculo infinitesimal, sin necesitar la muletilla de una integración improvisada, con métodos ajenos a esa disciplina.

Vamos a exponer, a continuación, una demostración del cálculo del límite (1), totalmente dentro del cálculo infinitesimal, sin recurrir a la integración *ad hoc*. Las acotaciones y fórmulas utilizadas se obtuvieron en forma totalmente algebraica y no a partir de derivadas ni integrales, que hubieran obligado a conocer de antemano el límite (1).

**DESARROLLO**

Primeramente, vamos a demostrar que el límite (1) existe .

**Lema 1**

*La función $\frac{sen\ x}{x}$ es creciente en sentido estricto para $x \to 0$ .*

Para demostrarlo , utilizamos la fórmula:

$$\text{sen } rx = r \text{ sen } x + \frac{r(1+r)(1-r)}{3!} sen^3 x + \frac{r(1+r)(1-r)(3+r)(3-r)}{5!} sen^5 x + - - - ,$$

válida para todo r , x reales .

Si $0 < r < 1$ , todos los coeficientes del segundo miembro son positivos y se tendrá , si sen x > 0 :

$$\text{sen } rx > r \text{ sen } x \qquad (0 < r < 1)$$

Dividiendo ambos miembros por rx queda :

$$\frac{sen\ rx}{rx} > \frac{sen\ x}{x} \quad (0 < r < 1) ,$$

o sea , haciendo $rx = y \Rightarrow x > y$

$$\frac{sen\ y}{y} > \frac{sen\ x}{x} \qquad (0 < y < x) \quad ,$$

lo cual demuestra que la función $\frac{sen\,x}{x}$ es creciente en sentido estricto para $x \to 0$ .

**Lema 2**

*La función* $\frac{sen\,x}{x}$ *está acotada superiormente para* $x \to 0$ *.*

La demostración se basa en que esta función es siempre inferior a $\frac{tg\,x}{x}$ para todo valor de x , tal que $0 < x < R$ (R = 1 recto) . Efectivamente :

$$\frac{tg\,x}{x} = \frac{sen\,x}{x\cos x} > \frac{sen\,x}{x} \qquad , \qquad (2)$$

porque $0 < \cos x < 1$ para $0 < x < R$ .

Por otra parte , la función $\frac{tg\,x}{x}$ es decreciente en sentido estricto para la sucesión $x_0, \frac{x_0}{2}, \frac{x_0}{4}, \ldots$ , con $0 < x_0 < ½\,R$ .

En efecto ,
$$tg\frac{x_0}{2^n} = \frac{2.tg\frac{x_0}{2^{n+1}}}{1 - tg^2\frac{x_0}{2^{n+1}}} > 2.tg\frac{x_0}{2^{n+1}} \qquad , \qquad (3)$$

porque $0 < tg\frac{x_0}{2^{n+1}} < 1$ si $0 < \frac{x_0}{2^{n+1}} < 1/2R$ .

Se dividen ambos miembros de (3) por $\frac{x_0}{2^n}$ :

$$\frac{tg\frac{x_0}{2^n}}{\frac{x_0}{2^n}} > \frac{tg\frac{x_0}{2^{n+1}}}{\frac{x_0}{2^{n+1}}}$$

lo cual demuestra que $\frac{tg\,x}{x}$ es una función decreciente en sentido estricto para la sucesión $x_0, \frac{x_0}{2}, \frac{x_0}{4}, \ldots, \frac{x_0}{2^n}, \ldots$

Por lo tanto , por (2) :

$$\frac{sen\frac{x_0}{2^n}}{\frac{x_0}{2^n}} < \frac{tg\frac{x_0}{2^n}}{\frac{x_0}{2^n}} < \frac{tg\,x_0}{x_0}$$

Si se eligen distintos valores de $x_0$ entre $x_1$ y $\frac{x_1}{2}$ , siendo $0 < x_1 < \frac{R}{2}$ y tal que el cociente $\frac{tg\ x_1}{x_1}$ es el máximo que puede tomar la función $\frac{tg\ x}{x}$ en el intervalo $(x_1 , \frac{x_1}{2})$, se tiene:

3

$$\frac{sen\frac{x_0}{2^n}}{\frac{x_0}{2^n}} < \frac{tg\ x_0}{x_0} < \frac{tg\ x_1}{x_1} \qquad (4)$$

El valor final es fijo y se ve que , ajustando x0 y n en el cociente $\frac{x_0}{2^n}$ éste abarca todos los valores posibles de x (excepto x = 0). Haciendo $x = \frac{x_0}{2^n}$ se obtiene por (4) $\frac{sen\ x}{x} < \frac{tg\ x_1}{x_1}$

y esto demuestra que $\frac{sen\ x}{x}$ está acotada para todo $0 < x < \frac{R}{2}$

**Lema 3**

*El límite* $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = L$ *existe* .

Porque $\frac{sen\ x}{x}$ es creciente y está acotada . Será , además ,

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} < \frac{tg\ x_1}{x_1} \qquad (5)$$

**CÁLCULO DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN y = sen x**

Es , por definición de derivada ,

$$\frac{d}{dx} sen\ x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(x + \Delta x) - sen\ x}{\Delta x} ,$$

que lleva a

$$\frac{d}{dx} sen\ x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} . \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

y , por (5) , da

$$\frac{d}{dx}\text{sen } x = L\ .\ \cos x \qquad (6)$$

**CÁLCULO DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN y = arcsen x**

Como x = sen y ,

será , por (6) ,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}.\,sen\ y = L\cos y = L\sqrt{1-sen^2 y} = L\sqrt{1-x^2} \quad ,$$

o sea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}arcsenx = \frac{1}{L\sqrt{1-x^2}} \qquad (7)$$

**CÁLCULO DE LA LONGITUD DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA POR INTEGRACIÓN**

Como la ecuación de la circunferencia de radio r centrada en el origen es

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad ,$$

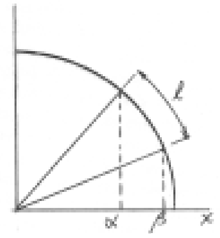
la longitud de un arco entre los límites $\alpha$ y $\beta$ será :

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+y'^2}\,.dx = \int_\alpha^\beta \frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

y por (7),

$$l = \mathrm{L}\ .\ \mathrm{r}\ (\,arcsen\ \beta - arcsen\ \alpha\,) \qquad (8)$$

Esta longitud es estrictamente proporcional al ángulo central subtendido por el arco , como se esperaba (Ver figura).




Ahora necesitamos definir en que unidades medimos los ángulos . Si se toma como unidad el ángulo recto (R) se tiene , haciendo $\alpha = 0$ , $\beta = 1$ :

$$arcsen\ \beta = arcsen\ 1 = \mathrm{R}$$

$$arcsen\ \alpha = arcsen\ 0 = 0 \quad ,$$

y si se reemplaza esto en (8) queda

$$l\ (\tfrac{1}{4}\ \text{circunferencia}) = \mathrm{L.r.R} \qquad (9)$$

**CÁLCULO DE** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{x}$

Como, por definición de $\pi$, la longitud de la circunferencia es $2\pi r$,

su cuarta parte será $\dfrac{\pi r}{2}$ lo cual, reemplazando en (9) da:

$$\frac{\pi r}{2} = L.r.R \quad ,$$

y se deduce:

$$L = \frac{\pi}{2R} \quad , \qquad (10)$$

que es el valor del límite buscado .

Si se adopta una unidad de medida de ángulos tal que

$R = \dfrac{\pi}{2}$ (unidad : radián) ,

queda , remplazando en (10) :

$$L = 1 \quad ,$$

o bien

$$\left[ \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1 \right] \quad ,$$

demostrado sin apelar a integrales *ad hoc* .

UNIVERSIDAD DE MORÓN

**AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD DE MORÓN**

**Rector**
Dr. Héctor Norberto Porto Lemma

**Vicerrector**
Ing. Agr. Jorge Raúl Ottone

**Secretario General**
Dr. Jose María Baños

**Secretario Académico**
Dr. Eduardo Néstor Cozza

**Secretario Administrativo**
Dr. Jorge Marcos

**Secretario de Ciencia y Tecnología**
Dr. Domingo Liotta

**Decano Facultad de Agronomía y Cs. Agroalimentarias**
Ing. Agrónomo Antonio Ramón Angrisani

**Decano Facultad de Arquitectura, Diseño, Arte y Urbanismo**
Arq. Oscar Aníbal Borrachia

**Decano Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales**
Dr. Jorge Raúl Lemos

**Decano Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales**
Dr. Aquiles Carlos Ferranti

**Decano Facultad de Derecho, Ciencias Políticas y Sociales**
Dr. Bruno Oscar Corbo

**Decano Facultad de Ciencias Aplicadas al Turismo y la Población**
Lic. Alejandro F. Gavric

**Decano Facultad de Filosofía, Cs. de la Educación y Humanidades**
Lic. Roberto Mario Paterno

**Decano Facultad de Informática, Cs. de la Comunicación y Técnicas Esp**
Ing. Hugo René Padovani

**Decano Facultad de Ingeniería**
Ing. Ezequiel Pallejá

**Decano Facultad de Medicina**
Dr. Domingo Liotta