

TEMARIO

■ A modo editorial

■ Un problema relacionado con el cubo y su resolución por medio de un Teorema de Euler.

■ El denominado: "enfoque monetario de la balanza de pagos".

■ Sistemas de ecuaciones lineales. Método de eliminación de Gauss vs. Regla de Cramer

■ Una aproximación didáctica a la determinación del óptimo bajo monopolio puro

■ Gestión financiera de la empresa

■ Derivados financieros (futuros y opciones)

■ La eficiencia de Pareto en la programación Meta

Boletín Matemático

Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada
de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales



Número
Diciembre

2001

Año 5



UNIVERSIDAD
DE MORÓN

Registro de la propiedad intelectual ISSN 0329-0255

Autoridades de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Decano
Dr. Jorge Emilio Salvel

Vicedecano
Dr. Miguel G. Skubic

Secretaria Académica
Prof. Elsa Noemí Lauro

Director de Estudios y Coordinación
Dr. José Domingo Mazza

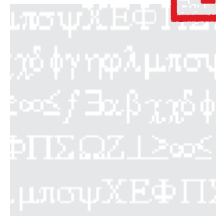
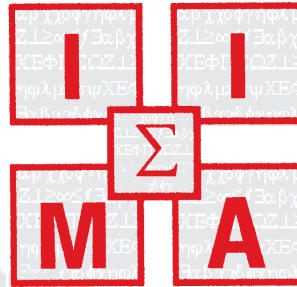
Secretaria Adjunta
Dra. María Isabel Antognoli
Dr. Alberto Lobato: Coordinador de Carreras

Consejeros del Honorable Consejo Académico de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Dr. Eduardo Favier-Dubois
Dra. Alicia I. de Montagut
Dr. Juan Carlos Bonzano
Dr. Sergio Ghedin
Lic. Jorge Enrique Lema
Dr. Carlos M. Trueba

Representante de Profesores ante el H. C. S.
Dr. Juan Carlos Lavignolle

Directores de Carrera:
Dr. Ernesto Merlo
Lic. Oscar Malfitano Cayuela
Lic. Enrique Ventura
Dr. Carlos Ferreras
Lic. Hugo Pavón Castex
Lic. Luis A. Leo
Dra. Amanda Llistosella
Lic. Guillermo Garberí

Directores de Institutos de Investigación:
Dr. Isaac A. Senderovich
Dr. Alfredo E. Villafañe
Dr. Omar A. Pertierra
Ing. Santos D. Soldano
Dr. Juan Ferrari Herrero
Dr. Eduardo M. Favier Dubois
Dr. Horacio A. Irigoyen
Prof. Elvira Venturo



Año 5 Número
Diciembre 2001



A modo editorial

Cuando se habla de un crecimiento exponencial de los conocimientos y su aplicación en la sociedad, generalmente no reparamos en la dimensión de esta reflexión.

Desde el punto de vista estrictamente matemático, el crecimiento exponencial de una función ocurre cuando la variable está actuando como exponente sobre un determinado valor base.

Asimilándolo con la frase mencionada, el conocimiento está representando la función y el tiempo transcurrido, la variable. La afirmación inicial implica que, en menor cantidad de tiempo, el progreso operado por los conocimientos y su aplicación es sustancialmente mayor.

Un análisis sucinto nos permite decir que, si partimos de una referencia válida para contar el tiempo, por ejemplo 1730, donde comienzan a vislumbrarse los primeros síntomas de la llamada Revolución Industrial, podemos aceptar que demandó 100 años, hasta 1830, el perfeccionamiento y la utilización de la máquina a vapor de Watt y el telégrafo de Morse.

Entre 1830 y 1905, es decir en los 75 años siguientes, se logró desarrollar el teléfono, la lámpara eléctrica, el motor a explosión, el telégrafo sin hilo, el vuelo aéreo y el tubo electrónico de rayos catódicos.

Sesenta años más tarde, entre 1905 y 1965, se obtienen el primer computador analógico, el computador digital, el transistor, los diversos lenguajes de programación, comenzando por el Fortran, los satélites y el comienzo de las comunicaciones satelitales y el casete de audio.

En 20 años, desde 1965 hasta 1985 se logran obtener y aplicar comercialmente: el circuito integrado, el video juego y el video reproductor, se comienza a trabajar en Internet, el chip electrónico, el fax; el sistema operativo DOS, el teléfono celular, el CD-ROM.

Desde 1985 hasta hoy han pasado tan solo 16 años y entre otros avances notables se encuentran la fibra óptica, el microprocesador, el desarrollo incesante de Internet, el aumento en la capacidad y velocidad en acumulación, procesamiento y transmisión de datos, la realidad virtual, la televisión digital y un sinnúmero de aplicaciones de la tecnología digital en los más variados campos.

Como estamos comprobando en nuestros días, el formidable crecimiento tecnológico ha potenciado la informática, que es seguramente la protagonista descolante que define esta época y que ha impuesto incluso su vocabulario.

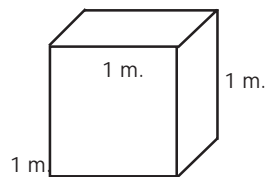
¿Qué ocurrirá en este iniciado siglo? ¿Hacia donde se desplazarán los conocimientos? ¿Se habrá llegado al fin de esta era? ¿Como será la nueva era post información? ¿Cuándo aparecerán los primeros síntomas? ¿Se mantendrá el crecimiento exponencial de los conocimientos?

Son sólo algunos apasionantes interrogantes todavía sin respuestas.

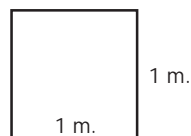
Un problema relacionado con el cubo y su resolución por medio de un Teorema de Euler

Por Juan Carlos Lopez (*)

El problema a resolver es el siguiente: construir un cubo por sus aristas utilizando, para éstas, un alambre que no tiene cortes y que es lo mas corto posible. Cada arista puede ser recorrida por el alambre las veces que se desee.

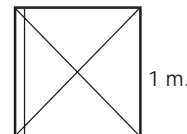


Por ensayos con alambre o haciendo dibujos, se obtiene el valor de 15 metros. ¿Podrá obtenerse con menos alambre? Se puede ensayar tomando el dibujo del cubo como un grafo (dibujo formado por líneas). Convendría, para fijar ideas, empezar con figuras más sencillas, como un cuadrado de 1 metro de lado.



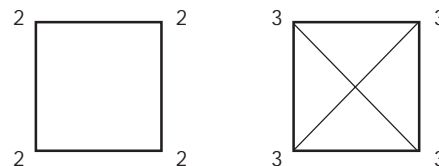
Se ve que se necesitan 4 metros de alambre. Ninguna arista tiene doble alambre.

En el grafo

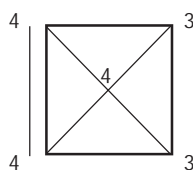


es necesario que uno de los lados tenga doble alambre. Su longitud será:
 $l = 5m + 2v2m = 7,82 \text{ m}$

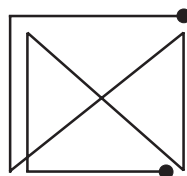
Aparentemente, este problema es similar al de dibujar un grafo de un solo trazo sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por la misma línea, que ya fue resuelto por el matemático Euler y que dice: "la condición necesaria y suficiente es que, de cada uno de los vértices del grafo parta un número par de líneas, excepto, a la sumo, dos vértices, en que ese número de líneas que parten puede ser impar." En los grafos anteriores tenemos, en los vértices:



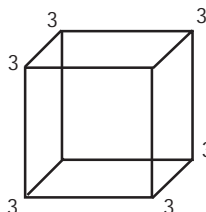
El primero entra dentro del enunciado del teorema. El segundo no, pero si duplicamos una arista, sí:



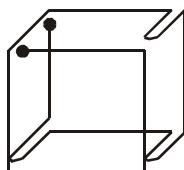
Esto entra dentro del enunciado del teorema. He aquí el trazo (o su equivalente con alambre):



Volvamos ahora a nuestro cubo que, proyectado sobre el plano, es un grafo.



Tiene nada menos que 8 vértices con número impar de líneas salientes, pero si se duplican 3 aristas, queda en la forma



que es la solución del problema con el mínimo de alambre (ya que al grafo original se agregan las 3 líneas más cortas que es posible trazar y se deja el máximo de 2 vértices con número impar de salidas). Contando el número de aristas recorridas se llega a 15, o sea que la longitud de alambre mínima es 15 metros, que coincide con el resultado obtenido por ensayo y error.

(*) Profesor de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

El denominado: "Enfoque monetario de la balanza de pagos"

Por el Prof. Alfredo Eduardo
Villafañe (*)

Existen expresiones que suelen ser difíciles de interpretar, especialmente para quienes leen o escuchan temas económicos. Muchos estudiantes se han acercado pidiendo aclaraciones sobre lo que se ha querido señalar con esa expresión. Aunque para algunos el concepto es elemental, para otros es confuso. Trataré de explicarlo brevemente:

La expresión es relativamente reciente. Son manifestaciones que se acuñan, dentro de estudios e investigaciones de ciertos analistas. En este caso correspondieron las apreciaciones a los economistas, J.Polak, R.Mundell y H. Johnson, integrantes del centro de investigaciones del FMI, y de sus alumnos de la Universidad de Chicago. La investigación fue realizada en la década de los años cincuenta y sesenta.

Se parte de la concepción, ya conocida, de un mercado de dinero en equilibrio, o sea:

$$\frac{M_s}{P} = L(R, Y) \quad (1)$$

Donde:

M_s = oferta monetaria (determinada por el banco central)

P = nivel de precios

R = tipo de interés

Y = renta nacional

$L(R, Y)$ = demanda de dinero agregada real

La igualdad (1) señala que la oferta monetaria,

en términos reales, es igual a la demanda de dinero en los mismos términos. Si introducimos ahora E , que identificamos como el valor en moneda nacional de los activos externos del banco central y A , que sería el de sus activos internos, equivalente al crédito interno; y aplicando el multiplicador de moneda K (que vincula los activos del banco central con la oferta de moneda) se tendrá:

$$M_s = K(E + A) \quad (2)$$

La variación de las reservas exteriores en un lapso determinado, ΔE , en el caso de un país cuya moneda no sea divisa reserva, es igual al saldo de su balanza de pagos. Relacionando (1) con (2), nos da pie para expresar las reservas externas del banco central como:

$$E = \frac{1}{K} P L(R, Y) - A \quad (3)$$

Suponiendo K constante, el superávit de la balanza de pagos será:

$$\Delta E = \left[\frac{1}{K} \right] \Delta [P L(R, Y)] - \Delta A \quad (4)$$

Precisamente, *esta ecuación es la que resume el enfoque monetario.*

¿ Qué nos expresa uno de los términos de (4) ? - Nos indica las variaciones de la deman-

da nominal del dinero, y nos dice que - si todo lo demás permanece constante - un incremento de la demanda de moneda repercutirá en un superávit en la balanza de pagos; y un aumento de la oferta monetaria, mantendrá el mercado de dinero **en equilibrio**. El otro término de la ecuación del saldo de la balanza de pagos, refleja los factores de la oferta en el mercado de dinero.

Si todo lo demás permanece constante, un aumento del crédito interno incrementa la oferta monetaria en relación a su demanda; en este caso la balanza deberá reflejar un déficit para disminuir la oferta monetaria y restablecer el equilibrio en el mercado monetario.

Como el concepto existente sobre la balanza de pagos es que ésta es igual a la suma de la cuenta corriente y la cuenta de capital, sin incluir aquí las reservas, gran parte de los análisis y estudios explicaban las variaciones de la balanza de pagos como el resultado de las variaciones de la cuenta corriente o de su

cuenta capital. El enfoque monetario ha contribuido, en el sentido que destaca que en muchas situaciones, los problemas de la balanza de pagos son el resultado directo de desequilibrios en el mercado monetario y, en consecuencia, una solución basada en la política monetaria puede ser la más apropiada. Con éste razonamiento, un déficit pronunciado de la balanza de pagos podría ser el resultado de un exceso en la creación de crédito interno. El enfoque monetario sugiere que un déficit sería el resultado de una disminución de la demanda de exportaciones.

Estos enfoques monetarios, constituyen un instrumento analítico muy útil, aunque su aplicación deba realizarse con cautela en la búsqueda de soluciones a problemas macroeconómicos. Es bastante interesante en su aplicación en políticas económicas, sobre todo ante los problemas producidos por las variaciones de la demanda de dinero y oferta monetaria interna.

Resumiendo: el enfoque monetario de la balanza de pagos es una forma de analizarla, que sugiere que las variaciones de las reservas del banco central pueden ser interpretadas como el resultado de los cambios en el mercado de dinero. Esto surge de la estrecha relación entre la balanza de pagos de un país y su oferta monetaria.

Bibliografía: The Monetary Approach to the Balance of Payments-FMI-1977

(*) Director del Instituto de Investigaciones Económicas de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Morón

Sistemas de ecuaciones lineales

Método de eliminación de Gauss vs. Regla de Cramer

Por el Prof. Angel Ferrari (*)

1.- Introducción.-

Sean m y n dos enteros mayores que 1. Consideremos el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, definido por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Si llamamos A a la matriz de m por n de coeficientes del sistema, B a la matriz de m por 1 de los términos independientes, y X a la matriz de n por 1 de las incógnitas, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (**)$$

entonces (1) se puede expresar mediante la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X = B \quad (2)$$

A su vez, si llamamos A^j a la j -ésima columna de A , $j=1, \dots, n$, esto es:

$$A^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

(**) Suponemos, obviamente, que A no es toda nula. Si podría serlo B .

(2) puede escribirse como

$$\sum_{j=1}^n x_j \cdot A^j = B \quad (3)$$

Observemos, además, que A^1, A^2, \dots, A^n, B son vectores del espacio vectorial R^m .

Llamemos r al rango de la matriz A ; r' al rango de la matriz de m por $n+1$: $A|B$, conocida como **matriz ampliada** o **matriz orlada** del sistema.

Es claro que

$$1 \leq r \leq \min \{m, n\} \quad (4)$$

$$1 \leq r' \leq \min \{m, n+1\} \quad (5)$$

$$r' = r \quad \text{ó} \quad r' = r+1 \quad (6)$$

2.- Campo de aplicación

Tanto el Método de Eliminación de Gauss (E.G.) (triangulación), como el Gauss-Jordan (G.J.) (diagonalización), pueden aplicarse a sistemas cualesquiera sean m y n , en tanto que la Regla de Cramer sólo se aplica a sistemas con $m = n$ (cuadrados) y que *además sean compatibles determinados, es decir, el caso con $|A| \neq 0$.*

En cuanto a las diferencias entre los dos primeros, obviamente triangular una matriz requiere de muchas menos operaciones que diagonalizarla. Pero G.J. ofrece la solución del sistema, cuando existe, explícitamente y también provee, cuando existe, la inversa de A . Ambos métodos proveen el determinante de A cuando es cuadrada (los detalles se brindan en el Apéndice).

A continuación mostraremos el aspecto que

adquiere la matriz A tras la aplicación de G.J., en todos los casos posibles de sistemas de ecuaciones lineales.

2.1.- m > n

2.1.1.- Las n columnas de A son linealmente independientes, es decir, r = n. En este caso, la aplicación de G.J. a la matriz A arroja el siguiente resultado (supondremos, sin pérdida de generalidad, que las filas nulas se producen en la parte inferior y las columnas nulas a la derecha):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & n & & & & \\
 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\
 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \\
 n & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 & & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \\
 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \\
 m-n & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 &
 \end{array}$$

Ejemplo 1.- Sea A

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & -2 \\
 -1 & 2 & 1 \\
 5 & -1 & 3 \\
 4 & -4 & 5
 \end{array}$$

La aplicación de G.J. pivoteando sobre la diagonal es:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \boxed{1} & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\
 -1 & 2 & 1 & 0 & \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & -1/2 \\
 5 & -1 & 3 & \Rightarrow & 0 & -1 & 13 & \Rightarrow & 0 & 0 & \boxed{25/2} \\
 4 & -4 & 5 & & 0 & -4 & -13 & & 0 & 0 & 11
 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc}
 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 \\
 \Rightarrow & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

2.1.1.1.- B pertenece al subespacio de dimensión n generado por las columnas de A.

Al ser éstas linealmente independientes, existe una única manera de expresar a B como combinación lineal de ellas.

Por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

$$r' = r = n$$

Ejemplo 2.- Sea A como en el Ej. 1 y B:

$$B = \begin{pmatrix} -1/15 \\ 13/15 \\ 53/30 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

La aplicación de las mismas transformaciones anteriores, pero ahora sobre la matriz ampliada A|B, da por resultado

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 \boxed{1} & 0 & -2 & -1/15 & 1 & 0 & -2 & -1/15 \\
 -1 & 2 & 1 & 13/15 & 0 & \boxed{2} & -1 & 4/5 \\
 5 & -1 & 3 & 53/30 & \Rightarrow & 0 & -1 & 13 & 21/10 \\
 4 & -4 & 5 & 1/3 & & 0 & -4 & -13 & 3/5
 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & -2 & -1/15 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \\
 0 & 1 & -1/2 & 2/5 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\
 \Rightarrow & 0 & 0 & \boxed{25/2} & 5/2 & \Rightarrow & 0 & 0 & 1 & 1/5 \\
 0 & 0 & 11 & 11/5 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

De la última tabla surge explícitamente:

- a) la (única) solución del sistema es $x_1 = 1/3; x_2 = 1/2; x_3 = 1/5$ (*)
- b) $r = r' = 3$.

2.1.1.2.- B no pertenece al subespacio de dimensión n generado por las columnas de A.

(*) De acuerdo con (3), esto es equivalente a decir que

$$1/3; 1/2; 1/5$$

son las coordenadas de B en la base formada por las columnas de A.

En este caso, la expresión (3) no es posible o, lo que es lo mismo, el sistema es *incompatible*; $r' = n + 1$

Ejemplo 3.- Si modificamos el b_4 del ejemplo anterior dejando los de más b_i inalterados (por ejemplo $b_4' = 7/3$), B' ya no pertenecerá al subespacio generado por las columnas de A . Las transformaciones que sufre este sistema al aplicar las mismas operaciones de pivoteo según G.J., son idénticas a las del ejemplo anterior excepto en el elemento b_4 , quedando como matriz final, la siguiente:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

De esta matriz transformada, resulta claramente lo que a través de Rouché-Frobenius es oscuro:

- a) $r = 3$; $r' = 4$
- b) el sistema es *incompatible*: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2$

2.1.2.- Las columnas de A son linealmente *dependientes*, por lo tanto, el subespacio generado por ellas será de dimensión $r < n$.

Entonces, un vector arbitrario B , o bien no puede expresarse como combinación lineal de las columnas de A (no pertenece al subespacio que ellas generan), o bien se puede expresar de infinitas maneras (por no constituir una base dichas columnas): el sistema será o bien *incompatible* o bien *compatible indeterminado*. El resultado de aplicar G.J. arroja una matriz de la forma:

$$\begin{array}{cccc} & r & & n-r \\ 1 & 0 \dots 0 & x \dots x & \\ 0 & 1 \dots 0 & x \dots x & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r & \dots & \dots & x \dots x \\ 0 & 0 \dots 1 & x \dots x & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-r & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m-n & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 \end{array}$$

Ejemplo 4.- Tomamos las mismas dos primeras columnas de los ejemplos anteriores, pero como tercera ponemos una columna que pertenece al subespacio que generan aquellas

$$\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & -3 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -5 & 0 & \boxed{2} & -8 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & -11 & \Rightarrow 0 & -1 & 4 & \Rightarrow 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 & -4 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

2.1.2.1.- El vector B pertenece al subespacio de dimensión r generado por las columnas de A .

$r = r' < n$.
Sistema compatible indeterminado.

Ejemplo 5.- A la matriz anterior la ampliamos con un B que pertenece al subespacio de dimensión 2, generado por sus 3 columnas.

$$\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & -3 & 4 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -5 & 8 & 0 & 1 & -4 & 6 \\ 5 & -1 & -11 & 14 & \Rightarrow \dots \Rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

De donde resulta evidente que las infinitas soluciones se obtienen dando un valor arbitrario a x_3 y despejando x_1 y x_2 . (Obviamente, si se hubiera pivoteado de otra manera, las variables dependientes serían otras).

$$\begin{array}{l} x_1 = 4 + 3x_3 \\ x_2 = 6 + 4x_3 \end{array}$$

(*) Profesor en Laboratorio de Cálculo y Estadística en diversas Facultades de la Universidad de Morón

Continuará en el próximo boletín

Una aproximación didáctica a la determinación del óptimo bajo monopolio puro

Por el Dr. José Luis Iparraguirre D'Elia (*)

Por pedido expreso de nuestros lectores, tenemos el agrado de repetir en forma completa este trabajo, publicado por partes en los boletines N°s: 5, 6 y 7

1) Introducción

La enseñanza a través de un tratamiento matemático completo de la maximización del beneficio de un monopolista presenta dificultades aunque se trate del caso más sencillo de una planta, un solo producto, un solo mercado (no discriminación) y dos factores productivos de los cuales es tomador de precios. A pesar de que se establezcan formas funcionales sencillas, como una demanda lineal del producto que vende el monopolista y función de producción hiperbólica sin cambio tecnológico.

Los escollos se hallan en que se debe tratar con un sistema de ecuaciones cuadráticas y de mayor grado, incluso según las especificaciones funcionales adoptadas, lo cual generalmente excede el bagaje de conocimientos del alumnado hacia la etapa de la carrera en que aparece este contenido.

En este trabajo se presenta una determinación rigurosa de la solución del problema sin necesidad de recurrir al análisis matemático de funciones no lineales a partir de describir en etapas el razonamiento implícito en el análisis que realizaría el monopolista.

El método que se pone a consideración posee la ventaja de aunar el razonamiento en términos económicos con la formalización en ecuaciones y con la utilización de conceptos que los alumnos previamente han adquirido, tales como isocuantas, isocostos, curvas de demanda, maximización de funciones lineales de dos variables sujetas a una restricción, etc.

Si bien las expresiones parciales, así como la expresión final del beneficio óptimo, son cuadráticas, en realidad están comprendidas íntegramente por coeficientes constantes y por valores previamente alcanzados por las variables intervinientes.

2) El problema

Vamos a suponer la existencia de un mercado monopolístico que presenta una demanda lineal:

$$P = A - b \cdot Q \quad (1)$$

Donde: P es el precio; Q la cantidad; A y b constantes positivas

Supongamos, además, que este monopolista tiene una función de producción de dos factores, capital y trabajo, que puede describirse así:

$$Q = K \cdot L \quad (2)$$

Donde K es el capital y L el trabajo.

Además, la función costos totales es (despreciando los costos fijos):

$$CT = r \cdot K + w \cdot L \quad (3)$$

Donde r es la tasa de interés y w el salario, los cuales están dados, es decir que el monopolista es un tomador de ambos precios.

Si el ingreso total es igual al precio por la cantidad, o sea:

$$IT = P \cdot Q \quad (4)$$

El beneficio total será:

$$BT = IT - CT \quad (5)$$

El problema de optimización se podría expresar como la maximización de la función de beneficio (5), la cual tras los correspondientes reemplazos queda:

$$\max BT = (A - b \cdot K \cdot L) \cdot K \cdot L - r \cdot K - w \cdot L \quad (6)$$

El primer término no es lineal, lo cual acarrea dificultades para presentar formalmente la resolución del problema, por cuanto se tendría

$$\begin{cases} dBT / dK = A \cdot L - b \cdot 2 \cdot K \cdot L^2 - r & (7) \\ dBT / dL = A \cdot K - b \cdot 2 \cdot L \cdot K^2 - w & (8) \end{cases}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones no lineal suele no estar comprendido en los cursos de matemática hasta el momento en que aparece este tópico en las asignaturas del área de economía.

No obstante ello, puede recurrirse a un procedimiento por etapas de determinación del punto óptimo, el cual tiene la ventaja adicional de seguir más de cerca el razonamiento que realiza el empresario monopolista.

3) El procedimiento por etapas

En primer lugar el empresario debe definir qué dotación de cada factor utilizará dada su restricción de costos : presupuesto total, costo salarial y de capital. (ecuación 3)

Para ello se recurre al conocido resultado de igualación de la recta de isocostos (3) con la curva isocuanta más elevada que surge de la función de producción. (ecuación 2)

La combinación óptima de cada factor es aquella en la cual la recta de isocostos es tangente a la curva isocuanta.

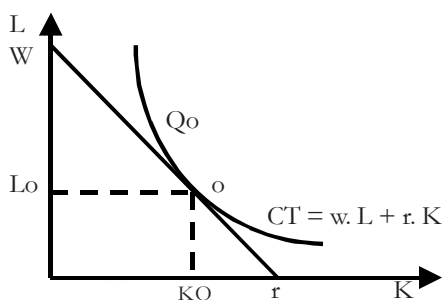


Gráfico 1

El monopolista elegirá la combinación $Lo - Ko$ con la cual podrá producir la cantidad Qo , máxima alcanzable dada la restricción de costos de la ecuación 3.

Podemos expresar analíticamente este punto, a partir de un problema de máximo condicionado de ecuaciones lineales de dos variables.

Sea la familia de isocuantas (en el plano L, K)

$$Q = K \cdot L \quad (2)$$

Sujeta a la ecuación de costos

$$CT = r \cdot K + w \cdot L \quad (3)$$

La maximización requiere en primer lugar construir el Lagrangiano :

$$H = K \cdot L + \lambda (r \cdot K + w \cdot L - CT) \quad (9)$$

Se obtienen las derivadas parciales primeras con respecto a K y con respecto a L , igualándolas a cero.

$$\begin{cases} dH/dK = L + \lambda \cdot r = 0 & (10) \\ dH/dL = K + \lambda \cdot w = 0 & (11) \end{cases}$$

La resolución del sistema de ecuaciones da como resultado que el ratio óptimo de capital y trabajo debe ser igual a la proporción de salario e interés.

$$\frac{Ko}{Lo} = \frac{w}{r} \quad (12)$$

Hasta aquí el monopolista sabe que debe elegir la cantidad Ko de capital y la dotación Lo de mano de obra tal que, la proporción Ko/Lo sea igual al precio relativo de ambos factores (w/r), siendo w, r los datos.

Por supuesto, este resultado no es otro que la igualdad de la productividad marginal de cada factor dividida por su costo.

En términos generales :

$$\frac{Pmg L}{r} = \frac{Pmg K}{w} \quad (12') (*)$$

La relación anterior puede expresarse en función de cada uno de los factores

$$Ko = (w / r) \cdot Lo \quad (13)$$

$$Lo = (r / w) \cdot Ko \quad (13')$$

Con los resultados anteriores, de la función de costos se desprende que :

$$CT = 2 \cdot w \cdot Lo \quad (14)$$

O, de manera equivalente, en términos de la dotación óptima de capital ,

$$CT = 2 \cdot r \cdot Ko \quad (14')$$

Es decir que en términos de costo total, la cantidad de factores óptima es :

$$Lo = \frac{CT}{2w} \quad (15) \quad \text{y} \quad Ko = \frac{CT}{2r} \quad (15')$$

Estas expresiones de dotación de cada factor (*) ver apéndice

tor, óptima desde el punto de vista asignativo son aplicadas en la función de producción (2) a los efectos de conocer cuál es la cantidad de producto denotada por la isocuanta Q_0 del gráfico 1.

$$Q_0 = K_0 \cdot L_0$$

$$Q_0 = \frac{CT}{2r} \cdot \frac{CT}{2w}$$

$$Q_0 = \frac{CT^2}{4.r.w} \quad (16)$$

Dado que se deben producir Q_0 unidades de producto, valor conocido pues en la expresión (16) ya no hay incógnitas, se puede reemplazar esta expresión en la función de demanda (1), para calcular cuál es el precio que debe fijar el monopolista para maximizar su beneficio.

Se obtiene:

$$P_0 = A - b \frac{CT^2}{4.r.w} \quad (17)$$

Conocidos el precio óptimo y la cantidad óptima, se calcula el ingreso total correspondiente, reemplazando las expresiones (16) y (17) en la ecuación (4):

$$IT_0 = (A - b \frac{CT^2}{4.r.w}) \cdot \frac{CT^2}{4.r.w} \quad (18)$$

Ahora ya se conoce el valor del ingreso total y del costo total correspondientes a la combinación óptima de factores. Por ende, puede calcularse a cuánto asciende el beneficio total óptimo del monopolista, reemplazando las expresiones (17) y (3) – esta última para $L = L_0$, y, $K = K_0$ – en la ecuación (5):

$$BT_0 = (A - b \frac{CT^2}{4.r.w}) \cdot \frac{CT^2}{4.r.w} - CT_0$$

$$BT_0 = [A - b \frac{(w.L_0 + r.K_0)^2}{4.r.w}] \cdot \frac{(w.L_0 + r.K_0)^2}{4.r.w} - (w.L_0 + r.K_0) \quad (19)$$

Y este es el valor de beneficio total que se quería obtener: el máximo alcanzable por este monopolista, dados todos los parámetros y constantes estructurales del problema: el costo de cada factor, el presupuesto total asignado a la producción, la función de producción y la demanda del producto que vende.

Además, la expresión de beneficio total está expresada en función de ambos factores de producción, lo cual la constituye en base de estudios acerca de regulación óptima, incidencia impositiva, etc.

4. Ejemplo numérico

Sean las siguientes, las funciones de demanda y de costos que enfrenta un monopolista:

Función de demanda:

$$P = A - b.Q = 15 - 0,25 Q$$

Función de costos:

$$CT = w.L + r.K = 5.L + 10.K = 100$$

La cantidad óptima a producir según la expresión (16), asciende a:

$$Q_0 = \frac{CT^2}{4.r.w} = \frac{100^2}{4.10.5} = 50$$

Para poder colocar esta cantidad en el mercado, el monopolista debe fijar un precio que viene determinado por la función demanda:

$$P = 15 - 0,25.Q$$

$$P_0 = 15 - 0,25 \cdot 50 = 2,5$$

Con el dato del precio y la cantidad óptimos, el ingreso total correspondiente puede calcularse a partir de la expresión (4):

$$IT_0 = P_0 \cdot Q_0 = 2,5 \cdot 50 = 125$$

Dado este valor de ingreso total, y el dato de que el costo CT es igual a 100, el beneficio total máximo surge por diferencia:

$$BT \text{ máx.} = IT_0 - CT$$

$$BT \text{ máx.} = 125 - 100 = 25$$

5.- Apéndice

Resulta fácil demostrar que la no linealidad no ocurre bajo condiciones de competencia perfecta, pues en este caso el precio de venta no está en función de la cantidad producida, sino que es constante e igual al precio de equilibrio del mercado (la demanda dirigida a una firma bajo competencia perfecta es infinitamente elástica).

Recordemos que bajo monopolio, el monopolista se enfrenta a la demanda de mercado, con lo cual según la ley de la demanda, se desea aumentar la cantidad vendida, deberá reducir el precio de venta del producto.

Así, en términos generales, la función de demanda en monopolio es:

$$P = P(Q)$$

O, lo que es lo mismo:

$$P = P[F(K,L)]$$

Esto introduce la no linealidad, pues el ingreso total viene dado por:

$$IT = P \cdot Q$$

Es decir que puede expresarse en términos de los factores de la producción

$$IT = P [F(K,L)] \cdot (K,L)$$

Mientras que en competencia perfecta, la demanda se expresa por:

$$P = P^*$$

Tal que al precio P^* se equilibre el mercado, es decir:

$$Q_d(P^*) = Q_s(P^*)$$

Donde Q_d es la cantidad demandada en el mercado y Q_s , la ofrecida.

Así, en competencia perfecta el ingreso total viene dado por:

$$IT = P \cdot Q$$

$$IT = P^* \cdot (K,L)$$

La expresión correspondiente del beneficio total en competencia perfecta es:

$$BT = P^* \cdot K \cdot L - r \cdot K - w \cdot L$$

La obtención del máximo beneficio bajo el régimen de competencia perfecta puede plantearse, entonces, como un problema de maximización de una función de dos variables.

bles.

$$\text{Max } BT = P^* \cdot K \cdot L - r \cdot K - w \cdot L$$

Se procederá a derivar con respecto de K , y de L y se igualará a cero como condición necesaria.

$$\begin{cases} \frac{dBT}{dK} = P^* \cdot L - r = 0 \\ \frac{dBT}{dL} = P^* \cdot K - w = 0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones lineales es de fácil resolución para los alumnos de la etapa de la carrera en que se introducen en esta temática.

Como sabemos, el resultados es:

$$L^{cp} = w / P^*$$

y

$$K^{cp} = r / P^*$$

Donde el súper índice cp denota que son la dotación de trabajo y capital que optimizan la asignación de factores.

Es decir que se obtienen las condiciones de optimización habituales de igualación del producto marginal de un factor a su precio.

Tengamos en cuenta al respecto que, dada la función de producción elegida, el producto marginal físico de un factor es igual al otro factor.

En términos matemáticos:

$$\frac{dQ}{dK} = L \quad (\text{producto marginal físico del capital})$$

$$\frac{dQ}{dL} = K \quad (\text{producto marginal físico del trabajo})$$

No obstante que se halla al alcance del alumnado la determinación del resultado óptimo bajo competencia perfecta a partir de plantear la maximización del beneficio total, encuentro que posee utilidad didáctica la aplicación del mecanismo por etapas, descrito mas arriba, también en el caso de competencia perfecta, por cuanto vincula los aspectos matemáticos con el razonamiento económico, de manera similar al descrito bajo monopolio, excepto, claro está, en lo que se refiere a la demanda dirigida a la firma.

(*)Sub director de la carrera de Licenciado en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Morón.

Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada
Investigaciones en curso.

Gestión financiera de la empresa

Director
Dr. Roberto Dominguez

Abstract:

Desarrollo de un estudio compilado de la gestión financiera en la empresa, grande o mediana, a partir de:

- a) el contexto amplio en el cual se desenvuelve el sistema financiero argentino;
- b) el escenario conceptual para la comprensión de la gestión financiera y de procesos y datos subyacentes, en las técnicas de análisis financiero;
- c) las herramientas de análisis financiero fundamentales para obtener respuestas significativas (*ratios*, punto de equilibrio, leverage);

- d) el planeamiento científico de la actividad (presupuestos y evaluación de proyectos de inversión);
- e) la determinación del costo de capital, clave para fijar objetivos;
- f) la administración racional del capital de trabajo, generadora de la rentabilidad;
- g) la estructura de financiamiento e inversión del negocio;
- h) instrumentos de pago del comercio internacional

Derivados financieros (futuros y opciones)

Director
Dr. Enrique Burcet

Abstract

Se explicará la forma en que operan los pisos de futuros y opciones, los agentes que intervienen, las características de los contratos, los tipos de órdenes, etc.

Se expondrán la forma de operaciones de coberturas, mostrando ejemplos prácticos. Se estudiarán los mercados de divisa, tasas de interés a corto plazo, largo plazo, e índices accionarios, etc., presentando las característi-

cas de los principales contratos y la forma en que se efectúan las coberturas.

Se estudiarán los mercados de opciones sobre futuros abarcando su concepto, tipo de opciones, explicación de las variables, cálculo del precio por medio de la fórmula de Black Scholes y sus principales estrategias. Análisis de la bibliografía.

La eficiencia de Pareto en la programación Meta

Director: Ing. Luinor E. Vilches

Abstract.

La programación meta introducida por Charnes y Cooper, es un método multiobjetivo que permite solucionar problemas económicos reales, en los que corrientemente se presentan varios objetivos simultáneos y conflictivos entre sí. Los tipos de problemas que pueden resolverse con ese método son muy variados y aun de índole muy compleja.

No obstante, surgió la objeción de que en ciertos casos, en los que existen soluciones alternativas, el mencionado método no asegura una solución Pareto óptima y puede dar una solución dominada, es decir, que existe una mejor solución que la dada.

Para solucionar el problema planteado se desarrollaron métodos interactivos, como el de Hwang y Masud, y test de verificación y corrección de soluciones, como el de Hannan y el de Carlos Romero.

También están en etapa de desarrollo programas específicos de computación, como el GPSYS, del Mathematical Programming Group de la Universidad de Portsmouth, de Gran Bretaña.

La verificación y corrección mencionadas son importantes porque ratifican la vigencia del método de programación meta, de aplicación más sencilla que los demás métodos de decisión multicriterio que se han desarrollado y de resultados más confiables en la solución de problemas complejos, que es donde los demás métodos flaquean.

Indice

A modo editorial	Pág. 4
Un problema relacionado con el cubo y su resolución por medio de un Teorema de Euler.	Pág. 5
El denominado: "enfoque monetario de la balanza de pagos".	Pág. 7
Sistemas de ecuaciones lineales Método de eliminación de Gauss vs. Regla de Cramer	Pág. 9
Una aproximación didáctica a la determinación del óptimo bajo monopolio puro	Pág. 12
Gestión financiera de la empresa	Pág. 16
Derivados financieros (futuros y opciones)	Pág. 16
La eficiencia de Pareto en la programación Meta	Pág. 17

Las opiniones vertidas en los trabajos que se publican son de exclusiva responsabilidad de sus autores

Staff

Director

Ing. S.D. Soldano

Redacción

Profesores de la Facultad de Ciencias
Económicas y Empresariales

**Producido por la Gerencia de Medios y
Comunicación - Universidad de Morón**

Editor:

Lic. Alejandro Ninin

Diseño Grafico:

D.G. Marcela Pralóng

**Impreso en los Talleres Gráficos
de la Universidad de Morón**

Año 5 Número 8

**Registro de la propiedad
intelectual SSN 0329-0255**

Universidad de Morón

Cabildo 134 (1708) Morón
(011) 4483-1023 (líneas rotativas)
Fax: 4627-8551
E-mail: webmaster@unimoron.edu.ar
Internet: www.unimoron.edu.ar

Z.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.
Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.
η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.
30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005
Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.
ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.
γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.
3 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2
15.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.
π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.
χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30
2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.
Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.
λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.
β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.3
1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.
Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.
ρ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.
α.β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005,
Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.
Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.
η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.
30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005
Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.
ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.
γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.
3 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.Π.Σ.Ω.Ζ.1.2
15.Ω.Ζ.1.2005 f.30 β.χ.χ.δ.φ.γ.η.φ.λ.μ.π.σ.ψ.Χ.Ε.Φ.

Autoridades de la Universidad de Morón

Rector

Dr. Mario Armando Mena
Vicerrector de Desarrollo
y Control de Gestión

Dr. Jorge R. Lemos

Vicerrector de Posgrado
y Extensión Universitaria

Lic. Olga B. Villalba

Vicerrector Académico
y de Investigación

Ing. Enrique L. Otero

Facultades

Agronomía

Decano Ing. Agr. Jorge Raúl Ottone

Vicedecano Ing. Agr. Antonio Angrisani

Arquitectura, Diseño, Arte y Urbanismo

Decano Arq. Oscar Borrachia

Vicedecano Arq. Attila Barkats Von Willei

Ciencias Económicas y Empresariales

Decano Dr. Jorge Emilio Salvel

Vicedecano Dr. Miguel G. Skubic

Cs. Exactas, Químicas y Naturales

Decano Dr. Aquiles Ferranti

Vicedecano Dr. Marcelo Mignone

Derecho y Ciencias Sociales

Decano Dr. Norberto Porto Lemma

Vicedecano Dr. Alfredo del Carmen Córdoba

Ciencias Aplicadas al Estudio

Sistemático del Turismo y la Población

Decano Lic. Alejandro Gavríc

*Vicedecana Traductora Pública Graciela
Redona*

Filosofía, Ciencias de la Educación y Humanidades

Decano Lic. Roberto Paterno

Vicedecana Prof. Ada Perez Wright

Informática, Cs. de la Comunicación y Técnicas Especiales

Decano Ing. Hugo Padovani

Vicedecana Lic. Sonia Zugna de Jausoro

Ingeniería

Decano Ing. Oscar Nuñez

Vicedecana Ing. Elisa Mestorino Bachofen

Medicina

Decano Dr. Domingo Liotta

Autoridades de la Fundación Universidad de Morón

Presidente

Dr. Mario Armando Mena

Vicepresidente

Sr. Ricardo Lirussi

Tesorero

Dr. Jorge Raúl Lemos

Secretario

Ing. Oscar Nuñez

