U N I V E R S I D A D D E M O R O N
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES DE MATEMATICA APLICADA

B o l e t í n   M a t e m á t i c o

El MARCO DE LAS INVESTIGACIONES EN EL COMIENZO DEL MILENIO

Dentro de muy poco tiempo nos encontraremos transitando los últimos meses del presente siglo. En poco más de un año y medio estaremos ingresando al tercer milenio de nuestra era, y en esta circunstancia, resulta propicio analizar en qué tipo de sociedad se desenvolverán en el futuro las investigaciones en las distintas ramas de las ciencias. Muchos problemas a resolver hace años se encuentran ya instalados y, quizá, las investigaciones involucradas en su tratamiento puedan verse potenciadas, Podemos mencionar entre ellos las condiciones del medio ambiente, las enfermedades aún sin curación, la disminución de los recursos energéticos tradicionales, la desocupación, la pobreza, las complejidades sociales, el crecimiento demográfico en países sin recursos, los cambios económicos globales.

Estas tareas tendrán como contexto dos cuestiones que han comenzado a presentarse y que seguramente estarán modificando a las sociedades en la próxima centuria.

Un aspecto que hoy se vislumbra es el torbellino de divulgación científica y general de manos de la potenciación de todos los medios unificados de video, informática, y comunicaciones, con cables optoeléctricos, satélites, telefonía y sus complementos operativos.

Este desarrollo que se expandirá a comienzo del siglo, tendrá un explosivo crecimiento socioeconómico mundial y se cree superará el efecto que generó la industria automotriz desde su creación.

Por otro lado, si se mantiene o se incrementa la velocidad de adquisición de nuevos conocimientos **y** los cambios que ellos promueven, las sociedades deberán encontrar procedimientos no traumáticos **y** efectivos de adaptación. La adecuación de las sociedades a dichos cambios **y** a sus derivaciones será**,** tal vez, la cuestión más difícil a afrontar por las próximas generaciones.

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES DE MATEMÁTICA APLICADA

Director: Ing. S. D. Soldano

FACULTAD DE CS. ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

UNIVERSIDAD DE MORÓN
Cabildo 134 - Morón
1708 - Buenos Aires
Argentina

Tel. (54-01) 483 - 1023
Fax. (54 -01) 627 - 8551
Of.311 - 3er.Piso
lnt.235

I.S.S.N. 0329- 0255

ANO 2 NÚMERO 3
Marzo -abril 1998

La Programación con Metas Múltiples

Resumen de la investigación en curso de realización

Por el Ing. LUINOR E. VILCHES *

1. INTRODUCCION

Es sabido que la programación lineal es una técnica poderosa para la resolución de una cantidad importante de problemas de toma de decisiones. Para que se pueda aplicar esta técnica, las variables de decisión involucradas deben ser continuas y tanto las restricciones como la función objetivo deben ser lineales. Que las variables sean continuas significa que deben poder tomar valores fraccionarios; que las mencionadas funciones sean lineales significa que se deben cumplir en ellas las condiciones de proporcionalidad y de aditividad.

La condición de proporcionalidad consiste en que cada término que indica la eficiencia en la función objetivo (ya sea utilidad o costo) de cada variable de decisión, tiene que ser proporcional al valor de la respectiva variable. Asimismo, cada término que indica el insumo debido a cada variable de decisión en cada una de las restricciones debe ser también proporcional al valor de la respectiva variable.

La condición de aditividad consiste en que cada variable debe dar origen a términos de la función objetivo y de las restricciones que se puedan sumar para dar los valores totales de las mismas.

Además de las condiciones mencionadas, las variables deben ser no negativas. Todas esas condiciones se resumen en las siguientes:

1. - Las variables deben estar relacionadas entre sí de modo que pueda formularse un sistema de ecuaciones o desigualdades de la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + -------- + a_{1n}x_n <=> b_1 \qquad \textbf{(1)}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + -------- + a_{2n}x_n <=> b_2$$

$$a_m x_1 + a_{m2}x_2 + -------- + a_{mn}x_n <=> b_m$$

0, abreviadamente: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j <=> b_i,$ con: i = 1, 2, ..., m **(2)**

j = 1, 2, ..., n

Las ecuaciones o desigualdades (1) representan las restricciones o limitaciones de cada problema. Los a_{ij} son los parámetros tecnológicos y los b_i son las limitaciones de recursos; todos sus valores son independientes entre sí, supuestamente conocidos con certeza, en cuyo caso el problema es determinístico. Si, en cambio, se los conoce con una distribución de probabilidad, el problema se convierte en probabilístico o estocástico (Ref. l).

2. Las variables deben estar relacionadas por una función objetivo o función económica de la forma:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + - - - - - - - - + c_n x_n \qquad \textbf{(3)}$$

$$\text{o} \qquad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \textbf{(4)}$$

Los c_j son los coeficientes de la función objetivo de cada variable de decisión x_j.

El valor óptimo de la función objetivo (3) se obtiene para un juego de valores x_j que, además, satisface al sistema de restricciones (1).

3. Las variables deben ser no negativas (condición de no negatividad):

$$x_j \geq 0, \qquad \textbf{(5)}$$

con j = 1,2...... n

Sin embargo, en las organizaciones productoras de bienes y de servicios de todo tipo aparecen frecuentemente problemas de toma de decisiones que involucran no solamente un objetivo como el expresado por la ecuación (3), sino varios. Muchas veces estos objetivos son conflictivos entre sí, de distinta importancia y hasta de magnitudes heterogéneas. Por ejemplo, además de obtener el máximo beneficio de una actividad económica se desea correr el mínimo riesgo, objetivos que, en general, son incompatibles. Como lo explicaron

A.Charnes y W.W.Cooper (Ref. 2), se trata de problemas en los que la región de factibilidad de las soluciones resulta no convexa. En el ejemplo de la página 216 de la obra citada presentan el siguiente problema de programación lineal:

$$\min z = x_1 + 1/2 X_2$$

sujeto a
$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$
$$5x_1 \leq 10$$

La representación gráfica de las restricciones es la siguiente:

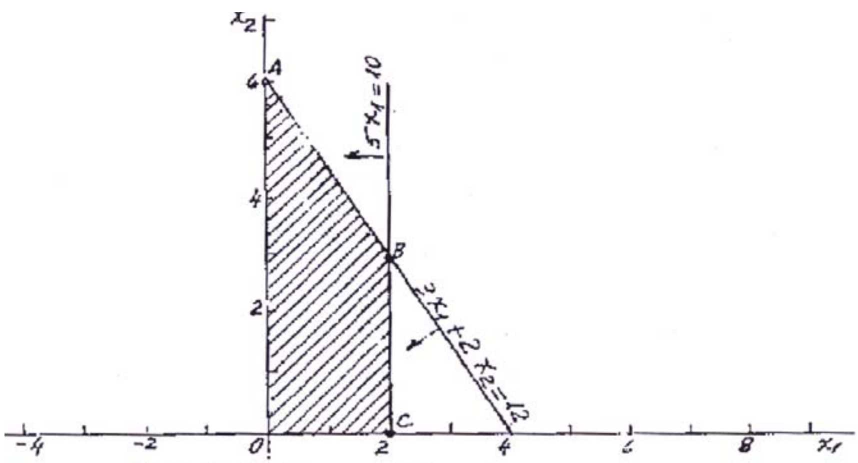


Fig. 1 . Restricciones compatibles

Queda definida la región de factibilidad OABCO, que es un poliedro convexo de dos dimensiones (polígono). Todos los puntos de este poliedro corresponden a pares de coordenadas x_1, x_2, que son soluciones del problema. Pero si se agregan a este problema dos condiciones adicionales como:

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$-x_1 + x_2 \geq 4$$

la representación gráfica es la de la Figura 2:

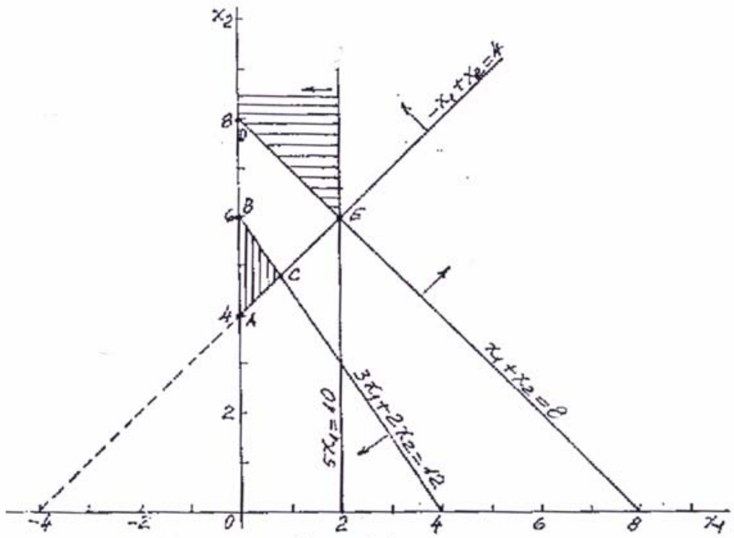


Fig. 2 - Restricciones incompatibles

Se observa que no queda definido un polígono convexo, sino dos figuras separadas. Los pares de coordenadas que corresponden a puntos de la superficie definida por las ecuaciones

$3x_1 + 2x_2 = 12$, y $-x_1 + x_2 = 4$ no corresponden a puntos de la superficie definida por las ecuaciones,

$-x_1 + x_2 = 4$ y $5x_1 = 10$. De modo que el sistema de restricciones no es compatible y el problema no tiene solución.

2.1 LA PROGRAMACION CON METAS MÚLTIPLES.

Para resolver problemas de las características mencionadas en el punto anterior, A. Charnes, W. W. Cooper y R. 0. Ferguson (Ref. 3) presentaron una nueva técnica, como una extensión de la programación lineal, que se denomina "programación con metas múltiples" o "programación meta" ("goal programming", en inglés).

Una "meta" es un valor numérico que se fija a un objetivo, valor que se desea alcanzar tanto como sea posible . En un problema de decisión pueden existir varias metas, a las que se les asigna un orden de prioridad. La optimización que se busca con este método consiste en aproximarse a la satisfacción de las distintas metas que se hayan fijado para el problema, procediendo en forma secuencial: se busca primero la satisfacción de la meta a la que se ha asignado la primera prioridad; luego, la satisfacción de la meta de segunda prioridad, etc.. La satisfacción de las distintas metas puede ser total o parcial.

El orden de prioridad se fija de acuerdo a la importancia relativa de las metas, por medio de un "coeficiente de prioridad" P_j , tal que :

$$P_1 >>> P_2 >>> P_3 >>> --- >>> P_j >>> P_k, \qquad \textbf{(6)}$$

interpretándose que P_1 es bastante mayor que P_2, éste bastante mayor que P_3, etc., sin interesar , en general , sus valores absolutos. Pero sí interesa la consistencia del ordenamiento, que se puede determinar por diversos métodos (Ref. 3). Uno de estos métodos es el de las "comparaciones pareadas", que consiste en comparar dos a dos todas las metas en todas las combinaciones posibles, indicando cual es la más importante de cada par. Supóngase, para un ejemplo, que se comparan cuatro metas estableciendo las siguientes diferencias, indicando con el símbolo >, "más importante que":

$$G_1 \rangle G_2 \qquad G_2 \langle G_3$$

$$G_1 \langle G_3 \qquad G_2 \rangle G_4$$

$$G_1 \rangle G_4 \qquad G_3 \rangle G_4$$

Para establecer la clasificación ordinal de metas se ordenan estas preferencias de modo que todos los signos "más importante que" queden orientados en el mismo sentido:

$$G_1 > G_2 \qquad G_3 > G_2$$

$$G_3 > G_1 \qquad G_2 > G_4$$

$$G_1 > G_4 \qquad G_3 > G_4$$

Tratándose de seis combinaciones, la meta más importante tiene que aparecer a la izquierda tres veces , (G_3) , la que le sigue en importancia dos veces (G_1) , y la última una vez .

Le corresponde, entonces, el coeficiente de prioridad P_1 a G_3 , P_2 a G_1 y P_3 a G_2.

El número de comparaciones, en este caso seis, surge de la fórmula combinatoria:

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \text{para} \quad r = 2 \quad y \quad n = 4 \quad ,$$

que resulta:

$$_nC_2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 1/2n\,(n-1)$$

El modelo matemático de un problema de decisión con metas múltiples se basa en la definición de las "desviaciones" o diferencias que pueden tener los distintos objetivos (ya sea en defecto o en exceso) con respecto a sus respectivas metas. La función objetivo se expresa en función de esas desviaciones y es la que se busca minimizar.

Para formular el modelo se llamará:

x_j a las variables de decisión;

P_i , a los coeficientes de prioridad que se pueden asignar a las distintas metas;

d_i^+ a la desviación en exceso de cada meta i;

d_i^- a la desviación en defecto de cada meta i.

El modelo matemático se formula en la forma:

Minimizar $$z = \sum_{i=1}^{m} p_i (d_i^+ + d_i^-) \qquad \textbf{(7)}$$

Sujeto a $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i \, , \qquad \textbf{(8)}$$

Para todo i

Con $$x_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \, , \qquad \textbf{(9)}$$

Para todo i y todo j

m es el número de metas y n el número de variables.

La existencia en la función objetivo (7) de las dos desviaciones posibles para la meta i, o sea d_i^+ y d_i^- , significa que se desea alcanzar exactamente su valor. Si para un problema determinado es aceptable que resulte una desviación en defecto (hacia abajo) del valor de cada meta i, se suprime d_i^- de la función objetivo, que queda entonces:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} P_i . d_i^+$$

Si, en cambio, es aceptable que resulte una desviación en exceso (hacia arriba) del valor de cada meta, se suprime d_i^+ de la función objetivo:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} P_i . d_i^-$$

Por otra parte, como no pueden resultar al mismo tiempo una desviación en exceso y una desviación en defecto para una misma meta, una de ellas o las dos deben ser iguales a cero, de modo que su producto debe ser siempre nulo:

$$d_i^- . d_i^+ = 0$$

En ciertos casos es necesario establecer cuantitativamente la importancia relativa entre dos o más metas. Esto se hace por medio de un "coeficiente de ponderación" o "penalización" que afecta a las respectivas desviaciones. También se aplican penalizaciones a desviaciones de una misma meta; por ejemplo, cuando la desviación en exceso es doblemente más importante que la desviación en defecto, se expresa: $2d_i^+ + d_i^-$.

Los cálculos para hallar la solución del modelo matemático se pueden realizar: manualmente, por medio de una adaptación del método simplex; por computadora, por medio de un programa de programación lineal, o, mejor aún, por medio de un programa específico de programación con metas múltiples.

CELEBRIDAD MATEMÁTICA	**PERIODO**	**PRINCIPAL APORTE**
ANTIFONTE	- 480;- 411 a.C.	Cálculo de áreas
ARQUÍMEDES	- 287;- 212 a.C.	Método infinitesimal
KEPLER, Juan	1571;1630	Sólidos de revolución
KAVALIERI	1591;1647	Cálculo integral

3.APLICACIONES.

La programación con metas múltiples permite resolver una gran variedad de problemas de decisión en diversas áreas, tales como:

a) Finanzas: presupuestos de capital, planeamiento financiero, distribución de inversiones.
b) Mercado: promociones de ventas, programación de publicidad, mezclas de productos.
e) Contabilidad.
d) Producción: planeamiento y programación, transporte, asignación de recursos.
e) Planeamiento de recursos humanos.

REFERENCIAS

[1] Dantzig, G. :"Linear Programming Under Uncertainty" – Management Science - Vol 1 – N° 2 - 1955 – Pág. 196 - 207 .
[2] Charnes , A. y Cooper , W. W. Management Models and Industrial Applications of Linear Programming - Ed. John Wiley and Sons, Inc. - Nueva York - 1961
[3] Charnes , A. , Cooper , W. W. y Ferguson , R . 0 : "Optimal Estimation of Executive Compensation by Linear Programming" - Management Science - Vol 1 – N° 2 - 1955 – Pág. 138 - I 51.
[4) - Eckenrode , Robert T. : "Weighting Multiple Criteria" - Management Science – Vol. 12 - N° 3 - 1965 – Pág.. 180 – 192.

* Profesor Titular de Investigación Operativa en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Morón.

EXTREMOS EN FUNCIONES DE n VARIABLES LIGADAS POR UNA RESTRICCIÓN

(Resumen de la investigación en curso de realización)

Por el Ing. Enrique R. Rutenberg *

En el número 1 de este boletín se informó que se estaba llevando a cabo, en el ámbito del Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Motón, la parte II del estudio sobre el tema de los extremos en funciones de n variables, es decir, el análisis para el caso de una función de múltiples variables ligadas por una restricción.

La determinación de los máximos y mínimos relativos para funciones del tipo descrito es un tema usual del análisis económico, imposible de resolver sin el auxilio de la herramienta matemática. Así, por ejemplo, puede presentarse el caso de tener que determinar la utilidad máxima cuando las n variables están ligadas por una recta de presupuesto.

El problema que dió origen a la investigación fué la falta de una demostración del método de los Hessianos orlados, que utilice los conocimientos matemáticos que poseen los alumnos que cursan la asignatura Matemática Para Economistas, ya que los textos disponibles demuestran el casa general utilizando elementos de espacios vectoriales no incluidos en el plan de estudio.

En resumen, el objetivo de la investigación fue establecer, para el tema que se trata, una demostración lo más clara y sencilla posible desde el punto de vista didáctico, que dé sustento teórico al método mencionado, utilizando los conocimientos matemáticos previos ya adquiridos por los alumnos.

La investigación bibliográfica que se realizó confirmó la carencia de textos que contuvieran una demostración como la que se pretendía; por tal motivo fué necesario intentar desarrollarla Este intento tuvo éxito, arribándose finalmente al objetivo fijado. La demostración desarrollada utiliza solamente operaciones algebraicas con sumatorias y teoría de los determinantes y será de utilidad para el estudio de la asignatura citada cuando sea publicada.

* Profesor titular de Matemática para Economistas en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Morón.
Profesor de la Universidad de Buenos Aires y de la Universidad Nacional de La Matanza.

ANOTACIONES AL MODELO DE FACTORES ESPECÍFICOS

(COSTO, DEMANDA Y PRECIOS DE LOS FACTORES)

POR EL PROFESOR ALFREDO EDUARDO VILLAFAÑE *

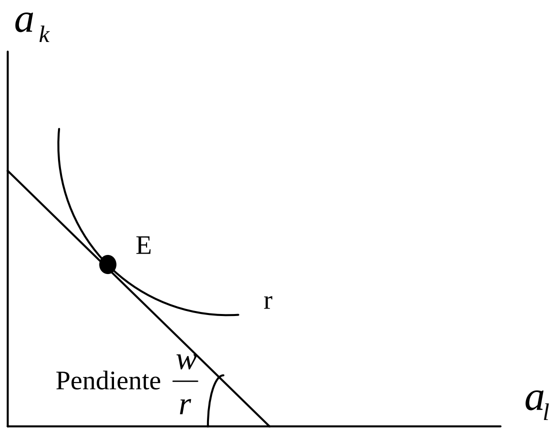
En el presente trabajo se trata matemáticamente el modelo de producción denominado de factores específicos, que permite la existencia de otros factores de producción, además del trabajo. Mientras que el trabajo es el factor móvil que puede desplazarse entre sectores, suponemos que los otros factores son específicos; es decir, pueden ser usados sólo en la predicción de bienes determinados.

El tratamiento matemático es útil para profundizar el entendimiento del propio modelo y, además, proporciona una oportunidad para desarrollar los conceptos y técnicas a aplicar en otros planteos.

El modelo de referencia, incluye dos sectores: manufacturas y alimentos. Cada sector aplica dos factores de producción: capital y trabajo en las manufacturas; tierra y trabajo en los alimentos. Previo a completarlo, examinaremos en general de qué manera se vinculan los costos y la demanda de factores de producción con los precios de los factores, cuando los productos emplean dos factores.

Pensemos en la producción de un bien que requiere capital y trabajo como factores de producción. Partiendo que el bien es producto con rendimientos constantes a escala, la tecnología de producción se puede resumir en términos de la "isocuanta unitaria" (I)"[1]; una curva que muestra todas las combinaciones de capital y trabajo, que pueden ser aplicados para obtener una unidad del bien. La curva (I) muestra que hay un intercambio (trade-off) entre la cantidad de capital usado por unidad de producto a_k y la cantidad de trabajo por unidad de producto a_i La estructura de la isocuanta (I) refleja el supuesto de que se hace progresivamente más difícil sustituir trabajo por capital a medida que la vinculación capital - trabajo aumenta, y viceversa.

CELEBRIDAD MATEMÁTICA	PERIODO	PRINCIPAL APORTE
GULDIN, Pablo	1577;1643	Cálculo de baricentros
ROVERVAL	1602;1675	Cálculo integral
PASCAL, Blas	1623;1662	Integración por partes
WALLIS, Juan	1616;1703	Noción de límite



Teniendo en cuenta una economía competitiva de mercado los productos adoptarán en la producción la relación capital-trabajo que lleve a un mínimo su costo. La elección de la producción que minimiza el costo surge en la figura precedente (punto E). El gráfico muestra la condición de la producción eficiente: la ratio capital / trabajo que minimiza el costo depende de los precios de los factores.

El punto(E) es el que la isocuanta (I) es tangente a una línea cuya pendiente es igual a la ratio: precio del trabajo (w) con el precio del capital (r), con signo menos. Por lo tanto, el costo real de producción es igual a la suma del costo de los factores: capital y trabajo.

0 sea: $$c = a_k . r + a_l . w$$

Estableciendo **(C),** en las condiciones expresadas; los costos no podrían reducirse aumentando a_k y reduciendo a_l , o sea al revés. De donde se deduce un cambio infinitesimal en la ratio capital / trabajo desde la elección que minimiza el costo no debe tener efecto sobre éste.

Por ejemplo: pensemos que sean da_k , da_l , pequeños cambios de la elección óptima de factores.

Tendríamos, para cualquier movimiento a lo largo de la isocuanta:

$$rda_k + wda_l = 0 \qquad (1)$$

¿Qué ocurriría, entonces, si los precios de los factores, r y w cambian?. Surgirían dos efectos: se modificará la elección de a_k *y* a_l , *y* de hecho, el costo de producción.

- <u>El efecto sobre las cantidades relativas de capital y trabajo usados para producir una unidad de producto.</u>

Como la ratio trabajo/capital, que minimiza el costo depende de la relación del precio del trabajo con el precio del capital; de acuerdo a esto $\frac{a_k}{a_l} = \phi(\frac{w}{r})$.

El costo de producción también cambiará. Para reducidas modificaciones en los precios de los factores, (d_r) y (d_w), el cambio de los costos de producción sería:

$$\frac{dc}{c} = (\frac{a_k r}{c})(\frac{dr}{r}) + (\frac{a_l w}{c})(\frac{dw}{w}) \qquad (2)$$

Sin embargo, de la ecuación (1), sabemos que los últimos términos de esta ecuación suman cero. Por lo tanto <u>el efecto</u> de los costos de los factores sobre el costo, puede manifestarse así:

$$dc = a_k dr + a_l dw \qquad (3)$$

En tal caso, resultará muy conveniente derivar una ecuación diferente de la (3). Derivando y multiplicando, se obtendría:

$$\frac{dc}{c} = (\frac{a_k r}{c})(\frac{dr}{r}) + (\frac{a_l w}{c})(\frac{dw}{w}) \qquad (4)$$

Continua en la Pág. 16

EL PODER DEL CONOCIMIENTO

POR EL ING. MARTÍN OSCAR ADLER (*)

El conocimiento científico y tecnológico evoluciona a un ritmo cada vez mis veloz, impactándonos todos los días: e infiriendo que mañana tendrá una intensidad superior a la de hoy.

En los últimos tiempos, el mundo, en permanente y vertiginoso avance en todos los campos del saber, le plantea al hombre la necesidad en estar constantemente actualizado para dar respuestas a las nuevas demandas que aparecen. Este hombre, que es el causante de este dinámico proceso, que nunca se detiene y que tiende a incrementarse, es el principal afectado, pues él mismo muchas veces, se encuentra superado para acompañar los permanentes cambios. Esta situación se traduce en la mayoría de los casos en angustia, hasta llegar en muchas oportunidades a la sensación de frustración.

La ciencia, que no deja de generar transformaciones en todas las áreas, sorprende, hasta a sus propios actores.

El crecimiento del conocimiento total de la humanidad, requiere cada vez menos tiempo; siendo mas sorprendente, en áreas tales como las comprendidas dentro de las ciencias exactas y naturales. El mismo se duplicó desde Cristo hasta 1750, luego de 1750 hasta 1950, después de 1950 a 1970, la hace desde 1970 a 1985, desde 1985 a 1995; considerando que se duplicará también, entro 1995 y el año 2000; por lo que se infiere, que de continuar esta ley exponencial, se duplicará por días.

Este sorprendente crecimiento del conocimiento, que puede simbolizarse camo una explosión del mismo, esta mostrando la dimensión de las investigaciones que se están realizando en todos los campos.

Jean Jaques Shriber dice: "que el conocimiento es la riqueza de la naciones", pero la explosión de datos e información no es la explosión del conocimiento. Los datos e información, que nos llegan a través de diferentes medios no son sinónimos de conocimiento. El proceso individual de entendimiento es el que permite pasar de los datos e información al conocimiento. Hay que aprovechar la información, sabiendo pensar, teniendo la capacidad para analizarla, seleccionarla, depurarla y transformarla o adaptarla luego en conocimiento. Cuando se dice: sabiendo pensar, hay una etapa previa que es enseñar a pensar, y como consecuencia aprender a pensar, aprender a aprovechar la información y por consiguiente aprender a transformarla o crear conocimientos.

Van Der Perre dice que: "personas y sus naciones en todo el mundo, están convencidos que la información científica y su aplicación es la llave maestra para resolver problemas y alcanzar progreso y prosperidad, para la competencia económica. Agrega que: la importancia de la información y el conocimiento, así como también. de las técnicas para distribuir el conocimiento, nos han llevado a una explosión, y a veces a dificultades extremas, al recolectar y distribuir información".

La información y el correspondiente conocimiento, son factores indispensables para el desarrollo general. El marcado desequilibrio existente, entre quienes producen el conocimiento total del mundo es un factor de preocupación para el futuro. Ciento cincuenta países, entre subdesarrollados o en proceso de desarrollo, generan, sólo, él 7% del total del conocimiento mientras que el resto, o sea el 93% es producido por pocos países. Como referencia, se puede recordar que en nuestro país, el presupuesto para Ciencia es 170 veces menor que en EE.UU., 35 veces menor que en Alemania y 4 veces menor que en nuestro vecino Brasil. Eric Banda, uno de los gestores que condujo la reforma y modernización del sistema español de Ciencia y Tecnología dice que: "en 1980, España creaba el 0,6% de la producción científica mundial, alcanzando el 2,2% en la actualidad". Debemos tomar conciencia de la gravedad de los índices mencionados anteriormente, para poder intentar revertirlos.

En cuanto a la inmensa cantidad de conocimientos disponible, existe preocupación y angustia por tanto por aprender con tan poco tiempo para hacerlo. No es fácil sistematizar la enorme masa de conocimientos; siendo más complejo, tal vez, otorgarle sentido. Lo difícil, también será, tener todos los conocimientos en el tiempo disponible; por lo que habrá que seleccionarlos. Para alcanzar este objetivo deberán existir quienes se encarguen de orientar para la selección.

El mundo tiene límites en todo, menos en la información y el conocimiento. Este crecimiento, sin límite, está aumentando su influencia en todas las áreas del saber humano, para transformarse en sinónimo de poder.

(*) Profesor Titular regular de las asignaturas MATEMATICA I, MATEMATICA II
y ADMINISTRACIÓN DE LA PRODUCCION

CELEBRIDAD MATEMÁTICA	PERIODO	PRINCIPAL APORTE
FERMAT; Pedro	1601; 1665	Máximos y Mínimos
DESCARTES; Renato	1596; 1650	Curvas algebraicas
BARROW; Isaac	1630; 1677	Integral definida
NEWTON; Isaac	1642; 1727	Cálculo dif. e integral

Viene de la Pág. 13

$\frac{dc}{c}$ puede entenderse como el porcentaje del cambio de (c) y se puede designar por convenio por $\hat{C}$;

Igualmente sea: $\frac{dr}{r} = \hat{r}$ y $\frac{dw}{w} = \hat{w}$.. Entonces, el término $\frac{a_k r}{c}$ se interpretaría como la participación del capital en los costos totales de producción: puede ser designado por convenio como:

Θ_k.

Así, la ecuación (4) puede escribirse:

$$\hat{C} = \Theta_k \hat{r} + \Theta_l \hat{w} \qquad donde: \Theta_k + \Theta_l = 1$$

Es este un ejemplo de "álgebra de sombrero", una forma muy valiosa para expresar las relaciones matemáticas en la economía internacional.

- La relación entre los precios de los factores y la ratio: capital/trabajo.

También puede ser expresado en "álgebra de sombrero": un incremento en el precio del trabajo en relación al precio del capital reduce la relación entre trabajo y capital, esta afirmación puede expresarse así:

$$\hat{a}_l - \hat{a}_k = \sigma(\hat{w} - \hat{r})$$

donde σ es el porcentaje de cambio en la ratio trabajo/capital, como consecuencia de un cambio del l % en la relación de precios de los factores, y es conocida como "elasticidad de sustitución".

----

1. Isocuanta = Curva de igual producto.

(*) Director del Instituto de Investigaciones Económicas de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales - Universidad de Motón.

HEMOS RECIBIDO ...

... la publicación de las presentaciones a las "18° Jornadas de Profesores Universitarios de Matemática Financiera" realizada en Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Córdoba, Huerta Grande, Córdoba entre el 9 y 11 de octubre de 1997.

Contiene los trabajos siguientes presentados en esa oportunidad:

<u>TOMO I</u>: Factura de Crédito, Los árboles de decisión, Rentas, Fondos Comunes de Inversión, Calcufin, Toma y Cancelación de un Préstamo Personal, Cálculo de la Tasa Efectiva, La Valuación de Productos Financieros, El Precio de las Obligaciones.

<u>TOMO II:</u> La Tecnología como Recurso Didáctico, Aplicación de Métodos Activos, Concepto Financiero y Toma de Decisiones, El Alemán Invertido, Modelización de Rentas Ciertas, Certificado de Cancelación de Obligaciones, Valuación de Activos Financieros, Las novedades en el Aula, ¿Es difícil ser claros?

Es de destacar el trabajo presentado por el profesor de nuestra Facultad Dr. Jorge Las Heras, bajo el título "¿Es difícil ser claros?" en donde formula interesantes conclusiones sobre la redacción de una normativa de la Dirección de Rentas de la **Provincia de Buenos Aires.**

Este material puede consultarse en el IIMA 3° piso aula 311
Edificio Central y además solicitar la copia del trabajo
de su interés.

SERIES CRONOLOGICAS

Análisis y estudio de componentes

(Continuación, viene de Boletín Matemático N° 2, Pág. 13)

Por el Dr. Jorge Omar Steimbach (*)

$$Y = a.sen\frac{2\pi(t-\alpha)}{T}\ donde \quad a, \alpha\ y\ T$$ son constantes.

a: es la amplitud (es decir la ordenada del máximo).
-a: es la ordenada del mínimo.
T : es el período (es decir, el intervalo de t correspondiente a una onda completa).
α : es la fase; es decir la distancia del origen al punto inicial del ciclo.

En economía, las cuatro partes de onda, que se repiten en el mismo orden son:

1) Prosperidad. Constituida por una rama ascendente de la curva que va desde la línea tendencial hasta llegar a un punto máximo, el óptimo del proceso.

2) Descenso. Sigue al máximo un período de descenso de la curva, tendiente a volver a los valores normales: la crisis es el punto final del descenso e inicial de la depresión.

3) Depresión: El proceso de descenso no se detiene y continúa por debajo de los valores tendenciales hasta alcanzar un mínimo.

4) Recuperación. A partir de este mínimo se produce la recuperación que es un movimiento ascendente hacia los valores normales. El proceso continúa en forma análoga.

Los ciclos económicos pueden ser totales: es decir, del conjunto de la economía del país o región, o parciales, de una determinada rama .

También han sido clasificadas por su período, en largos $(\cong medios\ siglo)$, $medianos$ $(\cong una\ década)$, cortos (desde algunos meses o algunos años).

Los medianos generalmente son de repercusión regional, los cortos son de repercusión local.

Componente Aleatoria " $A_{(ti)}$ "

El resto de la observación que quedaría sin explicar o sobreexplicada (defecto o exceso), es atribuible normalmente al azar o componente aleatoria: esta componente es hacia la cual van dirigidos los estudios más modernos de tipo econométrico, diferenciándose en ella una componente aleatoria o probabilística y una componente residual que cerraría con la magnitud de lo observado.

Estudio de una serie cronológica:

Para el estudio de la serie vamos a ir trabajando en una planilla de cálculo en hoja aparte, a la que iremos agregando los cálculos.

a) En primer lugar, los datos los vamos a ver en una tabla en la que para cada valor de *ti* (tiempo), vamos a tener el valor de la variable dependiente o atributo cuantitativo resultante de una observación determinada (Y_t).

En toda experimentación el continuo no existe, entonces es necesario analizarlo en particiones discretas. Esto implica que para nuestro análisis el tiempo lo vamos a tomar en forma equiespaciada.

Formas de determinación de los componentes:
Tendencia:

Como primera aproximación, para obtener la línea tendencial, suele buscarse un procedimiento de suavizado del polígono, es decir la sustitución del polígono original por una curva o polígono sin oscilaciones o con oscilaciones de menor amplitud que las originales. Con este objeto suelen utilizarse, como métodos sin precisión, pero muy simples y que pueden servir de guía en la determinación analítica precisa,

-el método de suavizado gráfico y
-el método de los promedios móviles.

Método de los mínimos cuadrados

Es un método de ajuste. Dado un conjunto de observaciones nos permite luego que hemos decidido cual es la familia de funciones que mejor representa la sucesión de los valores observados que integran la serie cronológica, determinar los parámetros que individualicen, dentro de la familia seleccionada, a una función determinada, de forma tal que las discrepancias cuadráticas entre las ordenadas de la función y las que representan los valores observados sea mínima y hablamos de discrepancias cuadráticas por cuanto al ser la función de ajuste, una función promedio con respecto a las observaciones, no tendría sentido considerar las sumas de sus discrepancias.

Dada una serie cronológica $[t, Y_t]$, se trata de determinar entre todas las rectas del plano $Y' = a_1 t + a_0$, aquella que mejor se ajuste a la serie de valores empíricos.

El método de los mínimos cuadrados nos va a dar la ordenada al origen (a_0) y la pendiente (a_1) que hace que la suma de los cuadrados de las diferencias sea un mínimo.

El método de los mínimos cuadrados nos decía que los valores de las observaciones menos los valores de la recta de ajuste, elevados al cuadrado, sumado para todos sus valores, tiene que ser la mínima de todos los posibles. (De cualquier otra función de ajuste).

$$\sum_{1}^{n} (Y - Y')^2 = mín$$

Si colocamos otro parámetro θ, reemplazando "Y" por sus parámetros

$$\theta(a_0 Y a_1) = \sum (Y - a_0 - a_1^t) = 0$$

Hallamos entonces las derivadas parciales para los mínimos:

$$\frac{a\theta}{\delta_{a_0}} = -2\sum (Y - a_0 - a_1^t) = 0$$

$$\frac{a\theta}{\delta_{a_0}} = -2\sum (Y - a_0 - a_1^t)^t = 0$$

$$\sum (Y - a_0 - a_1^t) = 0$$

$$\sum (Y - a_0 - a_1^t)^t = 0$$

distribuyendo:

$$\sum Y.t - \sum a_o.t - \sum a_1.t^2 = 0$$

$$\sum Y - \sum a_o - \sum a_1^t = 0$$

extrayendo constantes fuera del signo sumatoria y aplicando propiedades correspondientes:

$$a_0 \sum 1 + a_1 \sum t = \sum Y$$

$$a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum Y.t$$

La sumatoria de uno es igual a n.

Como a_0, a_1 son los parámetros de la recta de ajuste, toman el mismo valor en ambas ecuaciones, en consecuencia nos queda un sistema de ecuaciones normales.

Para poder resolver vamos a considerar los valores de t centrados (es decir que vamos a homogeneizar la variable) (el origen de la variable en lugar de estar afuera va a sor un valor propio del conjunto de valores que se están considerando, pudiendo entonces comparar).

Centralizamos el valor medio, (en el ejemplo 7), y tenemos la ventaja que ahora la sumatoria de t, va a ser igual a cero. Despejando los parámetros:

$$a_1 \sum t^2 = \sum Y.t$$

$$a_1 = \frac{\sum Y.t}{\sum t^2}$$

$$a_0 = \frac{\sum Y}{n}$$

En el ejemplo:

β) Utilizamos t_i como columna auxiliar, para centralizar t, sirve para centrarlo y vamos a considerar 0 al valor medio de la serie (si n fuera impar).

Si n fuera par:

Y	t	o también t
11	-1.5	-3
12	*-0.5*	-1
13	*0.5*	1
14	*1.5*	3

Para calcular a_0 y a_1, necesitamos además conocer $\sum Y.t$; $\sum t^2$, para lo cual creamos las columnas correspondientes

$$\gamma = \alpha.\beta$$
$$\delta = \beta^2$$

$$\varepsilon = Y_{LP} \ donde \ a_0 = \frac{\sum Y}{n} = \frac{235}{13} = 18{,}07 \quad y \qquad a_1 = \frac{\sum Y.t}{\sum t^2} = \frac{223}{182} = 1{,}22 \Rightarrow$$

$Y_{LP} = 18{,}07 + 1{,}22.t$

Si quiero conocer cualquier punto de la recta, reemplazo el valor *de* t_i en la fórmula.

Ejemplo: t_i = 6 entonces $Y_{t(-6)}$ = 18,07 + 1,22(-6) = 10,75. A partir de este punto, sumarnos un valor pendiente, y obtenemos los puntos sucesivos.

Decimos que Y_{LP} porque trabajamos con todos los valores de la serie.

A continuación representamos la función de ajuste Y_{LP} en el gráfico para compararla con la función de interpolación.

Determinación de Estacionalidad:

Para analizar la estacionalidad vamos a desarrollar el método de los promedios móviles.

Los promedios móviles van a ser precisamente los promedios que correspondan a los “s” valores sucesivos tomados a partir del primer valor y asignando el mismo al valor central del conjunto de "s" valores. Se denominan móviles porque el procedimiento es tal que a partir de los "s" primeros valores que constituyen la serie cronológica se van eliminando sucesivamente, el primer valor de los “s” y agregando el s+l hasta agotar el conjunto de valores que constituyen la serie. En el ejemplo:

Y	$Y_{(S=3)}$
10	
15	12,7
13	13,3
12	14,3
18	15,3
16	

Cuando "s" (cantidad de subperíodos para promediar) es impar, perdemos s-l valores, la mitad de ellos al comienzo y la otra mitad, al final.

Si "s" fuese par, perdemos en total "s" valores, s/2 al comienzo y s/2 al final y, en tal caso, es necesario proceder así: (Al realizar el promedio para s=4 y adjudicar al valor central queda entre dos subperíodos, por lo que es necesario repetir el procedimiento, pero ahora -cualquiera sea el valor par de s - para s=2, de manera que el promedio queda aparcado con un subperíodo, y luego se continúa el proceso como en el caso de s ipar).

	Tiempo	Y	$Y_{(s=4)}$	$Y_{(s=2)}$
X	I	4	-	-
	II	6	7	-
	III	8	8	7,5
	IV	10	9	8,5
X´	I	8	10	9,5
	II	10	11	10,5
	III	12	-	-
	IV	14	-	-

Para evitar la incertidumbre proveniente de que el número de serie a promediar sea par, suele procederse así: se suma un mes (por ej., enero) más el doble de los valores correspondientes a los once meses siguientes (en el ej. febrero a diciembre), más el valor correspondiente al mes subsiguiente (enero del año subsiguiente) y se divide el resultado de la suma por 24; este promedio se atribuye al mes de julio y así sucesivamente hasta agotar la serie corriendo un mes todos los sumandos. La propiedad principal de Y es que no contiene la variación estacional, por ser un promedio.

Otro método usado para determinar las variaciones estacionales es el de Parsons o "Eslabones relativos" aplicando cocientes sucesivos,

Tiempo	Y	Eslabones relativos
Enero	14	
Febrero	15	15/14
Marzo	16	16/15 Abril
Abril	11	11/16

$$Y = T.\varepsilon.\gamma \therefore Y_{(s=3)} = T.\gamma \Rightarrow \frac{Y}{Y_{(s=3)}} = \frac{T.\varepsilon.\gamma}{T.\gamma} = \varepsilon$$

Como eliminamos el factor estacional por medio de los promedios, va a quedar individualizada la fluctuación que corresponde a ese período, atribuible a la estacionalidad.

$$\eta): \frac{Y}{Y_{(s=3)}} = (\textit{períodon II}).\frac{15}{12{,}7} = 1{,}18$$ y así sucesivamente.

Función de pronóstico:

La tendencia y la estacionalidad normalmente existe como componente en toda observación, esa es la razón por la cual, algunos autores denominan a dicho producto como componente Normal de la serie cronológica; otros la denominan función de pronóstico.

$N_t = T.\varepsilon$ en consecuencia: componente normal para largo plazo:

$$N_t = Y_{LP}.\varepsilon$$

$$N_t = (\alpha.(y_{LP}) + (1-\alpha).(y_{CP})).\varepsilon$$

$$N_t = (\alpha.(a_0 + a_1.t) + (1-\alpha).(a_0 + a_1.t)).\varepsilon$$

Para obtener N_t debemos establecer el coeficiente de estacionalidad ajustado (por el promedio, para suavizarlo). En el ejemplo:

I=(0,84+0,88+0,94)/3=0,89

II=(1,18+1,18+1,11+1,19)/4=1, 14

III=(0,98+0,98+0,95+0,99)/4=0,97

Siempre la sumatoria de los s períodos debe ser igual a s.

Si se quisiera establecer la función de pronóstico para el primer cuatrimestre de 1988:

$Y_{LP} = 18{,}07 + 1{,}22.9$ (Proyección de t)=29,05, que es la tendencia, luego: Pronóstico I/88=29,05.0,89 (estacionalidad ajustada para un primer cuatrimestre) = 25,85 $\cong 26$

(Debe pronosticarse en las mismas unidades de la serie).

La tendencia, a su vez, puede desconocerse en largo y corto plazo.

Corto plazo:
Consideramos a lo sumo la mitad última, de las observaciones, como máximo, y no menos de un tercio de los valores. En la planilla de cálculo se tomó desde el tercer cuatrimestre del 84, solo para ejemplificar n par, ya que así n=8. En realidad es siempre conveniente, teniendo en cuenta los límites indicados, comenzar al inicio de un año.

A continuación se indican los parámetros de corto plazo y la Normal general del pronóstico para el I subperíodo de 1988:

$$a_o = \frac{\sum Y}{n} = \frac{167}{8} = 20{,}88$$

$$a_o = \frac{\sum Yt}{\sum t^2} = \frac{64{,}5}{42} = 1{,}54$$

$$N_t = (\alpha.(a_0 + a_1.t) + (1-\alpha)(a'_0 + a'_1.t')).\varepsilon$$

$$N_t = (0{,}3(18{,}07 + 1{,}22.9) + 0{,}7(20{,}88 + 1{,}54.6{,}5))0{,}89 = 27$$

Dado que como hemos visto $N_t = T_t.\varepsilon_t$ y

$T_t = \alpha.(a_0 + a_1.t) + (1-\alpha).(a'_0 + a'_1.t')$ siendo α = 0,30

Calculamos N_t expresada en los valores originales de la serie (en este caso valores enteros). Si comparamos Y_{LP} con Y_{CP} se ve que esta última modifica a la tendencia secular (en más) a partir del II° cuatrimestre de 1986. (Ver en la gráfica donde se cortan las rectas tendenciales, formando un ángulo).

Continuará en el otro boletín.

LA MATEMÁTICA DE NUESTRA AMÉRICA PRECOLOMBINA

Por el Ing. Santos D. Soldano (*).

En los últimos días de diciembre de 1997 leemos en los periódicos sobre el descubrimiento de una gran cantidad de momias de una civilización preincaica. Esta civilización llamada CHACHAPOYA fue una cultura que floreció hacia el año 900 DC siendo sus características guerreras como atributo sobresaliente. Estos pueblos fueron invadidos y dominados a mediados del siglo XV por los Incas.

Lo que mueve nuestro interés por la noticia en relación con la matemática es que entre los restos óseos y artefactos diversos encontrados en las tumbas, también fueron hallados ciertos conjuntos atados de cordones colgantes denominados kipus o quipus. Estos consisten en un perfecto sistema de notación y cálculo lógico numérico que también fue utilizado por los Incas hasta su sometimiento definitivo a mediados del siglo XVI.

Por lo trascendido de las investigaciones, que desde hace bastante tiempo se llevan a cabo, estas formas de arreglos con hilos, nudos y colores llegaron a contener datos de tipo estadístico, contable e impositivo aplicada a los recursos humanos, producción agrícola y construcciones como así también registrar el calendario y datos históricos. Se ha determinado que fueron utilizados en el Imperio Incaico para asentar la información contable y registrar los tributos que abonaban alrededor de 5.000.000 de habitantes distribuidos en lo que hoy es Perú y partes de países como Ecuador, Bolivia, Chile y del norte de Argentina.

Lamentablemente por reacciones de tipo supersticioso, el español procedió a destruir miles y miles de ellos. Con los pocos que se salvaron y se conservaron hasta el día de hoy, los investigadores lograron reconstruir ciertos aspectos del sistema y descubrir algunas relaciones entre los valores allí registrados.

Para su utilización, los incas, usaban técnicas de codificación y decodificación que se realizaban en cada región del imperio por individuos profesionales especialmente preparados que se llamaban "kipucamayos". Estos se llevaron a sus tumbas el secreto de la técnica de registro que incluía, como ya dijimos, anotaciones estadísticas sobre población, cosechas y otros de interés económico para el Inca.

Por la pérdida por destrucción anteriormente comentada, no ha podido reconstruirse totalmente toda su aplicación habiéndose perdido una muy valiosa información.

Sin embargo los investigadores lograron desentrañar parte de su codificación.

Así por ejemplo, se ha comprobado, que no sólo acumulaban información sino que además algunos contienen diversos juegos matemáticos tipo puzzles y que toda la estructura lógica se apoya en los colores de las cuerdas, los distintos tipos de nudos, los espacios entre ellos, su agrupación, su tamaño y su posición relativa en el conjunto.

Trabajos de investigación mas profundos realizados nos asombran al revelar el contenido de estructuras como hojas de cálculo, matrices y diagramas.

Como se aprecia, el desarrollo de una diversidad de conceptos matemáticos era notable en estos pueblos.

El kipus nos brinda la posibilidad de contar con un testimonio físico que ha permitido analizar y valorar el grado de avance alcanzado por los habitantes del sur de nuestra América precolombina.

(*)Ing. Santos Soldano: Profesor Titular de Estadística Social y Director del I.I.M.A.

Referencias.-

- Las cuentas con hilos de colores, Ana Broitman, Diario Clarín, 31/08/97.
- Descubren en Perú doscientas momias de una civilización preincaica, Nora Bär, La Nación 20/12/97.
- Mathematics Magazine Vol 65 n°4, Pág. 211, oct. 1992: Before the Conquest, Marcia Ascher.

Durante el transcurso de 1997 el I.I.M.A. ha recibido distintas publicaciones. Entre ellas ponemos a disposición e nuestros lectores 10 ejemplares pertenecientes al volumen 4 de la publicación NOTICE de la AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY para su consulta.

I N D I C E

Antífonte (-480; -411 AC) y luego **Arquímedes** (-287; -212 AC), se consideran verdaderos iniciadores del cálculo de áreas que condujo al cálculo integral.

DIRECCIONES IMPORTANTES EN INTERNET

http:// www.ams.org/bookstore/
Librería de la AMS (Sociedad Matemática Americana) Catálogo de libros, videos, revistas y software matemáticos.

http:// www.wolfram.com, info@wolfram.com
Información sobre el programa de computación MATHEMATICA Del Instituto WOLFRAM RESEARCH

http://www.cbs.nl/isi/
Información del ISI (Internacional Statistics Institute) Sobre publicaciones de estadística.

http: //www.maths.anu.edu.au/ims
Información sobre programación anual de conferencias y congresos del Institute of Matheniatical Statistics

COLABORADORES

ADLER, Martín Oscar
ARRIAZA, Lorena Nuria
CUCCIOLETTA, María Luján
IRIGOYEN, Norma Beatriz
JUNGMAN, Mónica
MONTAGUT, Alicia Irene
LAS HERAS, Jorge
LOPEZ, Juan Carlos
MARENCO, María Teresa,
NUÑEZ, Oscar
OTERO, Enrique
SALVEL, Jorge
RUTENBERG, Enrique
SOLDANO, Santos Darío
STEIMBACH, Jorge Omar
VALERO, María Cristina
VILCHES, Luínor E.
VILLAFAÑE, Alfredo E.
ZAMICHIEI, Juan Jorge,

HASTA NUESTRO PROXIMO BOLETÍN QUE ESPERAMOS UD. LO RECIBA DURANTE EL MES DE SETIEMBRE DE 1998