Ing. Lino Spagnolo
Capítulo 2
Mecánica Racional

Análisis Vectorial
Campos Escalares y Vectoriales

Se define como campo escalar a una función $\varphi(x, y, z)$ de la posición que le hace corresponder en forma unívoca un escalar a cada punto de ese espacio.

Campos escalares son la temperatura en un instante dado para una región espacial. También lo son la presión, la densidad, etc. para cada punto de una región en un instante definido.

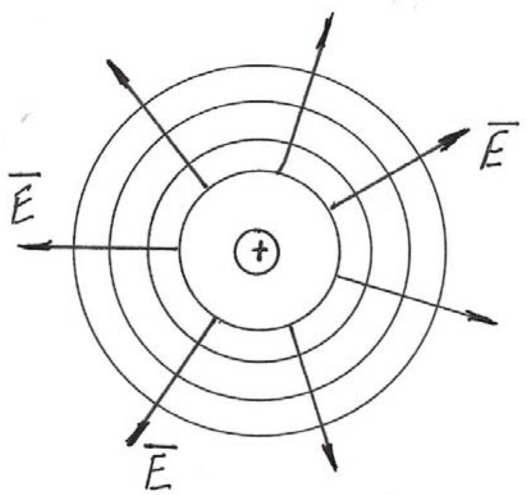
También **se define al campo vectorial** como la función $\vec{A}(x, y, z)$ vectorial de la posición, que asigna en forma unívoca a cada punto del espacio una magnitud vectorial.

Son conocidos como campos vectoriales el campo gravitatorio, el campo eléctrico y el magnético, el campo de velocidades de un fluido, etc.

En la figura se ve un campo eléctrico $\vec{E}$ creado por una carga positiva.

El campo se indica por las flechas salientes y su longitud indica la intensidad del campo en los puntos desde donde parten.

Las circunferencias concéntricas se llaman líneas equipotenciales. En el espacio son superficies equipotenciales.



Derivada de un campo vectorial con respecto a un escalar

Consideremos un campo vectorial $\vec{A}$ que depende unívocamente de un conjunto de variables escalares $u_1, u_2, \ldots$ y que designaremos como:

$$\vec{A} = \vec{A}(u_1, u_2, u_3, \ldots)$$

Admitiremos además que tal función vectorial es continua, o sea:

$$\vec{A}(u_i + \Delta u_i) - \vec{A}(u_i) < \varepsilon \quad \forall |u| < \delta \quad y \quad \varepsilon \to 0;\ \delta \to 0$$

Ejemplos de campos uniformes son el campo eléctrico $\vec{E}(x, y, z, t)$, función de la posición y del tiempo. También lo es el **vector posición,** función de la posición y ésta función del tiempo:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) \to \vec{r}[x(t); y(t); z(t)]$$

De tal forma que aceptando estas definiciones de un campo o función vectorial, podemos definir su derivada como:

$$Si\ \vec{A}(s) = A_x(s)\hat{i} + A_y(s)\hat{j} + A_z(s)\hat{k} \rightarrow \frac{d\vec{A}}{ds} = \lim_{\delta s \to 0}\left[\frac{\vec{A}(s+\Delta s) - \vec{A}(s)}{\Delta s}\right]$$

En definitiva: $$\boxed{\frac{d\vec{A}}{ds} = \frac{dA_x}{ds}\hat{i} + \frac{dA_y}{ds}\hat{j} + \frac{dA_z}{ds}\hat{k}} \qquad (2\text{-}1)$$

Las $\frac{dA_x}{ds}, \frac{dA_y}{ds}, \frac{dA_z}{ds}$ cumplen las condiciones ya conocidas para las derivadas escalares y son componentes de un vector.

$$\frac{d}{ds}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds} + \frac{d\vec{B}}{ds} \ ; \ \frac{d}{ds}(F_{(s)}\vec{A}) = \frac{dF_{(s)}}{ds}\vec{A} + F_{(s)}\frac{d\vec{A}}{ds} \qquad (2\text{-}2)$$

con $F_{(s)}$ una función escalar de s.
Además:

$$\frac{d}{ds}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{ds} \ ; \ \frac{d}{ds}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{ds} \qquad (2\text{-}3)$$

En la segunda ecuación se debe mantener el orden de los productos entre $\vec{A}\ y\ \vec{B}$.

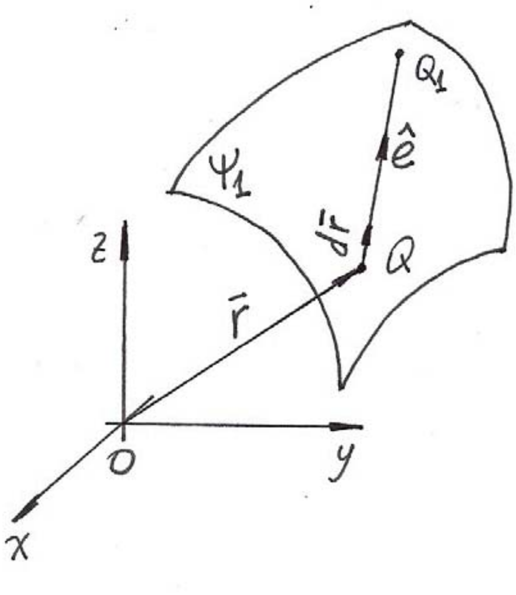
Gradiente y Derivada direccional de una función escalar.

Sea $\Psi_1(x,y,z) = cte$ la ecuación de la superficie Ψ_1 y tomemos un punto $Q(x,y,z)$ sobre tal superficie. Para definir el punto Q también es posible definir una función vectorial que una $\overline{OQ}$, y ese vector será el vector posición $\vec{r}_Q(x,y,z) = \overrightarrow{OQ}$.

Sobre la superficie Ψ_1 definamos una dirección mediante el versor $\hat{e}$ que apunta hacia Q_1. El versor estará definido por los tres cosenos directores $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3$.

La ecuación vectorial que apunte de Q a Q_1 en la dirección $\hat{e}$ será: $\vec{r} = \vec{r}_Q + q\hat{e}$ y las ecuaciones paramétricas, con q parámetro son:

$$x = x_Q + q\cos\alpha_1$$
$$y = y_Q + q\cos\alpha_2 \qquad (2\text{-}4)$$
$$z = z_Q + q\cos\alpha_3$$



A lo largo de esta trayectoria la función $\Psi_1(x,y,z)$ es una función de q solamente y cuya derivada, o incremento de la función en el punto Q será:

$$d\Psi_1 = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}dy + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}dz \qquad (2\text{-}5)$$

Y por definición, se llama derivada direccional de la función escalar Ψ_1 según la dirección $\hat{e}$, a la derivada respecto del parámetro q :

$$\frac{d\Psi_1}{dq} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\frac{dx}{dq} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}\frac{dy}{dq} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\frac{dz}{dq} \qquad (2\text{-}6)$$

Que por (2-4) da: $\frac{d\Psi_1}{dq} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\cos\alpha_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}\cos\alpha_2 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\cos\alpha_3$ (2-7)

Si combinamos ahora los tres factores de la derivada (2-7) con la función vectorial $\vec{\nabla}\Psi_1$ (que luego definiremos como $Grad\Psi_1$), definida por la expresión:

$$\vec{\nabla}\Psi_1 = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\hat{k} \qquad (2\text{-}8)$$

Habida cuenta de que los cosenos directores de $\hat{e}$

se definen como: $\cos\alpha_1 = \hat{e}\cdot\hat{i}\ ;\ \cos\alpha_2 = \hat{e}\cdot\hat{j}\ ;\ \cos\alpha_3 = \hat{e}\cdot\hat{k}$

La derivada (2-7) se convierte en: $\boxed{\frac{d\Psi_1}{dq} = \hat{e}\cdot\vec{\nabla}\Psi_1}$ (2-9)

En el caso en que la superficie sea una superficie de nivel $\phi(x,y,z) = cte.$ y sea $\hat{n}$ su versor normal, puede ponerse que $\hat{n}\cdot\nabla\vec{\phi} = \frac{d\phi}{dn} = \left|\nabla\vec{\phi}\right|$ como derivada normal.

Para una función de superficie genérica $\varphi(x,y,z) = cte$ su incremento diferencial

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$

y tomando un desplazamiento elemental genérico

$$d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

introducimos nuevamente la expresión de gradiente antes nombrada:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{k}$$

obtenemos que el diferencial total de una función escalar de punto tiene la expresión sintética:

$$d\varphi = Grad\varphi \cdot d\vec{r} \rightarrow \boxed{d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r}} \qquad (2\text{-}10)$$

Ejemplo 2-1.

La ecuación de esta parábola es:

$$\varphi_{(x,y)} = \frac{1}{2}x^2 - y = 4$$

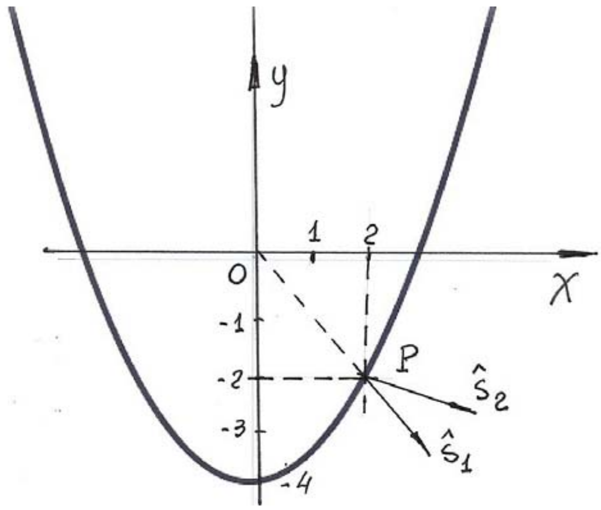
Se pide hallar las derivadas direccionales según $\hat{s}_1 \ y \ \hat{s}_2$

Siendo estos versores iguales a:

$$\hat{s}_1 = \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{j}$$

$$\hat{s}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

En el punto $P_{(2;-2)}$



1.-) Derivada direccional según $\hat{s}_1$ $\quad \dfrac{d\varphi}{ds} = \vec{\nabla}\varphi \cdot \hat{s}_1 = (\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}) \cdot \hat{s}_1$

Como $\dfrac{d\varphi}{dx} = x$ y en el punto P se tiene $x = 2 \therefore$

$$\frac{d\varphi}{ds} = (x\hat{i} + -1\hat{j}) \cdot (\frac{2}{\sqrt{8}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{j}) = \frac{4}{\sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{6}{\sqrt{8}} = 2{,}12$$

2.-) Derivada direccional según $\hat{s}_2$ $\quad \dfrac{d\varphi}{ds} = \nabla\vec{\varphi} \cdot \hat{s}_2 = (\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}) \cdot \hat{s}_2$

$$\frac{d\varphi}{ds} = (x\hat{i} + -1\hat{j}) \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j}) = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = 2{,}23$$

Esta segunda derivada direccional es mayor que la primera.

Definición formal de Gradiente.

Como puede comprobarse con el cálculo del gradiente de la función en el punto $P_{(2;-2)}$ su valor es el mismo que la derivada direccional según $\hat{s}_2$ y en consecuencia se comprueba también que la derivada direccional es máxima según la dirección del gradiente. O lo que es lo mismo, el gradiente de una función señala la dirección de máximo crecimiento de dicha función.

Ahora bien, ¿pueden ser componentes de un vector las tres derivadas parciales de una función escalar?

Recordando lo visto en el capítulo 1, para ser componentes de un vector, las componentes cualesquiera deben cumplir con que su fórmula de transformación sea:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}11)$$

y que su transformación inversa cumpla con:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}11)'$$

Si esto lo aplicamos a las componentes $\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ y las derivamos de acuerdo con las reglas:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dx'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx'} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}a_{11} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}a_{12} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}a_{13}$$

La cumple perfectamente con la ley de transformación (2-11). De la misma forma ocurre con las demás componentes:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dy'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dy'} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dy'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}a_{21} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}a_{22} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}a_{23}$$

y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dz'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dz'} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dz'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}a_{31} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}a_{32} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}a_{33}$$

Con la demostración anterior, se puede entonces enunciar: **“El gradiente de una función escalar de punto $\varphi(x,y,z)$, es un vector que, en coordenadas cartesianas ortogonales, está formado por las sumas vectoriales de las derivadas parciales de dicha función”.**

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{k} \qquad (2\text{-}12)$$

Para los campos escalares de la física, el concepto de gradiente es muy útil para conocer en qué dirección dicho campo crece más rápidamente. En campos de presión o temperaturas, señalará precisamente hacia dónde crecen más rápidamente esos valores.
Por tal motivo el gradiente es considerado un operador vectorial pues al actuar sobre una función escalar informa una de sus características extremales.

Tal como se vio en el ejemplo, la expresión $\frac{d\varphi}{ds} = \vec{\nabla}\varphi \cdot \hat{s}$ se escribe con el uso del operador $(\nabla, Nabla)$ en la forma simbólica: $\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}}$ (2-13)

Se aplica a $$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{\nabla}\varphi \cdot \hat{s} = (\hat{s} \cdot \vec{\nabla})\varphi = s_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + s_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + s_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Tal como se vio para los campos escalares, también existe el concepto de derivada direccional para campos vectoriales. Haciendo uso de la notación recién definida, la derivada direccional de un campo vectorial $\vec{A}$ es:

$$\frac{d\vec{A}}{ds} = (\hat{s} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = (\hat{s} \cdot \vec{\nabla}A_x)\hat{i} + (\hat{s} \cdot \vec{\nabla}A_y)\hat{j} + (\hat{s} \cdot \vec{\nabla}A_z)\hat{k} \qquad (2\text{-}14)$$

Ejemplo 2-2.

Dados los dos campos vectoriales:

$$\vec{A} = xyz\,\hat{i} + \cos x\,\hat{j} + 2e^x z\,\hat{k} \quad y \quad \hat{s} = z\,\hat{i} - x^2 y\,\hat{\hat{j}} - x\,\hat{k}$$

Hallar la derivada direccional de $\vec{A}$.
Aplicando (2-11):

$$(\hat{s} \cdot \vec{\nabla}A_x)\hat{i} = (z\hat{i} - x^2 y\hat{j} - x\hat{k}) \cdot (yz\,\hat{i} + xz\,\hat{j} + xy\,\hat{k})\hat{i} = (yz^2 - x^3 yz - x^2 y)\hat{i}$$
$$(\hat{s} \cdot \vec{\nabla}A_y)\,\hat{j} = (z\hat{i} - x^2 y\hat{j} - x\hat{k}) \cdot (-\sin x)\,\hat{j} = (-z\sin x)\,\hat{j}$$
$$(\hat{s} \cdot \vec{\nabla}A_z)\hat{k} = (z\hat{i} - x^2 y\hat{j} - x\hat{k}) \cdot (2e^x z\,\hat{i} + 2e^x\,\hat{k})\hat{k} = (2e^x z^2 - 2xe^x)\hat{k}$$

Sumando las tres componentes:

$$\frac{d\vec{A}}{ds} = (\hat{s} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = (yz^2 - x^3 yz - x^2 y)\hat{i} + (-z\sin x)\,\hat{j} + (2e^x z^2 - 2xe^x)\hat{k}$$

Problema 2-1. A partir de una generalización de (2-14)

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}A_x)\hat{i} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}A_{\ddot{y}})\,\hat{j} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}A_z)\hat{k}$$

Demostrar para el vector posición: $(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \vec{r}$

Ídem: $\vec{\nabla}\left|\vec{r}\right| = \hat{r}$ y también: $\vec{\nabla}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^2}\hat{r}$

Expresión del Gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales

En el Capítulo 1 hemos definido las coordenadas curvilíneas ortogonales como las conformadas por tres parámetros u_1, u_2, u_3 que permiten dar una posición en el espacio tal como lo hacían x, y, z. Al variar cada uno de los tres parámetros desde un punto $P(u_1, u_2, u_3)$ se generan tres líneas o curvas cuyas tangentes tienen la propiedad de ser normales entre sí a partir de dicho punto. Las tres direcciones están definidas con vectores unitarios, o versores, denominados como $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$.

La descripción de tal sistema curvilíneo se hace sobre la base de su relación con las coordenadas cartesianas ortogonales mediante las siguientes fórmulas de transformación:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x,y,z) \\ u_2 = u_2(x,y,z) \\ u_3 = u_3(x,y,z) \end{cases} \text{ que admiten sus inversas } \begin{cases} x = \varphi_1(u_1,u_2,u_3) \\ y = \varphi_2(u_1,u_2,u_3) \\ z = \varphi_3(u_1,u_2,u_3) \end{cases} \qquad (2\text{-}15)$$

ya que el Jacobiano de la transformación es distinto de cero en la región cercana al punto P:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)} > 0 \qquad (2\text{-}16)$$

En ambos sistemas de coordenadas, $el\ x,y,z$ o el u_1,u_2,u_3, un punto P puede especificarse indistintamente en función de (x,y,z) o de (u_1,u_2,u_3).

Si el vector posición viene dado en función de las u_i, tal como $\vec{r}(u_1,u_2,u_3)$, un incremento o variación elemental de su posición viene dado por el diferencial:

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}du_3 = h_1du_1\hat{e}_1 + h_2du_2\hat{e}_3 + h_3du_3\hat{e}_3 \qquad (2\text{-}17)$$

Que define el desplazamiento elemental en este sistema de coordenadas; en la cual cada h_1,h_2,h_3 es el llamado factor de escala. Además se verifica que:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i} = h_i\hat{e}_i$$

Obsérvese que la traslación elemental en estas coordenadas está definida sobre la base de un triedro de vectores de dirección que son $h_1\hat{e}_1,\ h_2\hat{e}_2, h_3\hat{e}_3$ y que varían de punto a punto, además de no ser iguales entre sí. Al contrario de las coordenadas cartesianas en las cuales el triedro de las direcciones estaba formado por los versores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ siempre constantes e iguales entre sí.

Una función escalar de punto también se define en el sistema curvilíneo en función de

$$\varphi(u_1,u_2,u_3)$$

y un incremento diferencial es

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_3}du_3 = h_1du_1 + h_2du_2 + h_3du_3 = \nabla\vec{\varphi}\cdot d\vec{r}$$

Por lo tanto, como el incremento vectorial es:

$$d\vec{r} = h_1du_1\hat{e}_1 + h_2du_2\hat{e}_3 + h_3du_3\hat{e}_3$$

La expresión del gradiente deberá ser:

$$\boxed{\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\hat{e}_3} \quad (2\text{-}18)$$

Otra interesante definición de gradiente se obtiene si consideramos la derivada direccional en el sentido de la normal de una superficie $\phi(x,y,z) = cte$ en la cual vimos que $\hat{n}\cdot\nabla\vec{\phi} = \frac{d\phi}{dn} = \left|\nabla\vec{\phi}\right|$ por lo tanto nos permite escribir al gradiente como: $\boxed{\vec{\nabla}\phi = \frac{d\phi}{dn}\hat{n}}$ Esta expresión nos dice que el gradiente de una función escalar (una superficie en general) es la derivada direccional de dicha función en la dirección de la normal a la superficie expresada por $\phi(x,y,z) = cte$ en cada punto considerado.

Además y dado que en coordenadas cartesianas $\vec{\nabla}x = \hat{i}\ ;\ \vec{\nabla}y = \hat{j}\ ;\ \vec{\nabla}z = \hat{k}$

Podemos poner: $\vec{\nabla}\phi = \phi_x\vec{\nabla}x + \phi_y\vec{\nabla}y + \phi_z\vec{\nabla}z$

Y en general, si $\varphi(u_1,u_2,u_3) = 0$ es una función escalar en coordenadas curvilíneas, podrá expresarse como fórmula absolutamente general:

$$\boxed{\vec{\nabla}\varphi = \varphi_{u_1}\vec{\nabla}u_1 + \varphi_{u_2}\vec{\nabla}u_2 + \varphi_{u_3}\vec{\nabla}u_3} \quad (2\text{-}19)$$

Gradiente en coordenadas cilíndricas y esféricas

En el primer capítulo se calcularon los factores de escala para las coordenadas cilíndricas:

$$h_1 = 1\ ;\ h_2 = \delta\ ;\ h_3 = 1$$

Por lo tanto el Gradiente en cilíndricas será:

Coord. Cilíndricas

$$\boxed{\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\delta}\hat{e}_\delta + \frac{1}{\delta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}} \quad (2\text{-}20)$$

Para las coordenadas esféricas los factores de escala eran:

$$h_1 = 1\ ;\ h_2 = r\ ;\ h_3 = r\sin\theta$$

De lo cual deducimos:

Coord. Esféricas.

$$\boxed{\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{e}_\phi} \quad (2\text{-}20)'$$

Ejemplo 2-3.

Dada la distancia polar $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ (módulo de vector $\vec{r}$), hallar su gradiente.

1) En coordenadas cartesianas: $\vec{\nabla}\varphi = \frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j} + \frac{z}{r}\hat{k} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$

2) En coordenadas esféricas: $\varphi = r \quad \therefore \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{e}_r = \hat{e}_r = \hat{r}$

Ejemplo 2-4.

Sea $\Psi(\delta,\theta,z) = 0$ una función en coordenadas cilíndricas. Utilizando la fórmula (2-19)’ hallar su gradiente.

Solución: $\vec{\nabla}\Psi(\delta,\theta,z) = \Psi_\delta \vec{\nabla}\delta + \Psi_\theta \vec{\nabla}\theta + \Psi_z \vec{\nabla}z$

Problema 2-2. Dada la función escalar $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xy$

Calcular: 1.- El $\vec{\nabla}\varphi$ en el punto $P(2,3)$

2.- La $\frac{d\varphi}{du}$ en el mismo punto $P(2,3)$ y en la dirección de un radio a un ángulo $\alpha = 45^o$ respecto al eje x.

3.- La dirección y magnitud de $\frac{d\varphi}{du}$ en el mismo punto $P(2,3)$ cuando sea máxima la derivada direccional.

Soluciones: 1.- $(-2\hat{i} + 2\hat{j})$; 2.- 0; 3.- $135^o \; y \; 2\sqrt{2}$

Divergencia de una función vectorial.

Utilizando la notación cartesiana del operador $(\vec{\nabla}\, Nabla)$ y de la función escalar $\varphi(x,y,z) = cte$ se puede aplicar dicho operador a la función obteniéndose:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \rightarrow \qquad \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k} \qquad (2\text{-}21)$$

Una primera y sencilla definición del operador **Divergencia** se puede obtener en coordenadas cartesianas, aplicando el mismo operador $(\vec{\nabla}\, Nabla)$ a un campo vectorial mediante un producto escalar.

Si la función vectorial es $\vec{B}$ entonces el producto escalar será precisamente la **Divergencia del campo vectorial**:

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}} \qquad (2\text{-}22)$$

El significado físico de la divergencia está relacionado con las líneas de fuerza de un campo vectorial como en el caso del campo magnético, del campo eléctrico, del campo gravitatorio o del campo de velocidades de un líquido incompresible.

Si consideramos un volumen elemental ΔV rodeado por una superficie cerrada también elemental ΔS, las líneas de fuerza del campo que atraviesan dicha superficie elemental presentarán diversas alternativas: o son más las que salen que las que entran, en tal caso habrá una fuente en su interior; o son más las que entran que las que salen, y en este caso habrá un sumidero en su interior que las absorbe.

El cálculo de la divergencia a través de dicha superficie elemental dará la magnitud de la fuente o del sumidero que existe en su interior. Dicho de otra forma, la divergencia de un campo vectorial $\vec{B}$ a través de una superficie ΔS es la variación del flujo de dicho campo por la unidad de volumen.

O sea: $$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{d\Phi_B}{dV} \qquad (2\text{-}23)$$

El flujo del campo vectorial $\vec{B}$ es proporcional a la cantidad de líneas de fuerza que atraviesa la unidad de superficie. En fórmulas:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad (2\text{-}24)$$

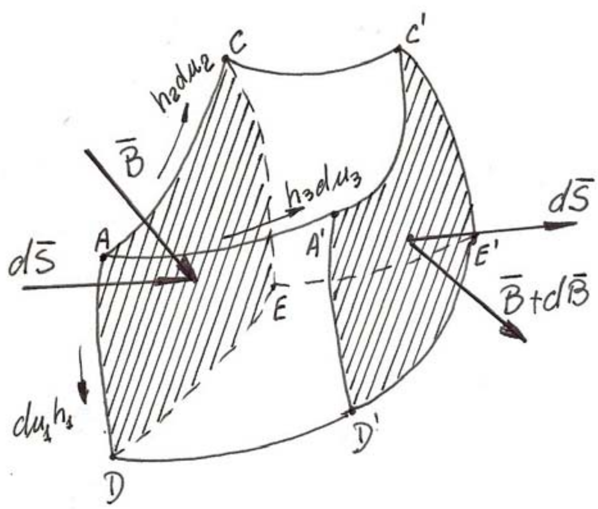
Por lo tanto la divergencia será:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{d\Phi_B}{dV} = \lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n}.dS \qquad (2\text{-}25)$$

En la cual se ha definido la superficie orientada $d\vec{S}$ mediante su versor normal en el punto y el diferencial de superficie.

Para deducir la expresión de la divergencia en coordenadas curvilíneas a partir de su definición (2-25) como cociente del flujo por unidad de volumen, completamente general e independiente del sistema de coordenadas elegido, comenzaremos por definir un cubo elemental de aristas curvilíneas dadas por

los desplazamientos(2-17) $h_1 du_1 \hat{e}_1$, $h_2 du_2 \hat{e}_2;\ h_3 du_3 \hat{e}_3$ ya señalados en el diagrama. El campo vectoria entrante $\vec{B}$ por la superficie elemental $ACDE$ tiene por componentes B_1, B_2, B_3 en el punto de entrada de coordenadas u_1^o, u_2^o, u_3^o. El flujo del campo $\vec{B}$ atraviesa el volumen elemental a través de las 6 caras elementales.
A nuestros propósitos consideramos sólo dos caras en la dirección $\hat{e}_3$.



Aplicando el teorema de Taylor, el flujo debido a la componente de B_3 en las cercanías del punto de ingreso u_1^o, u_2^o, u_3^o será:

$$B_3 h_1 h_2 du_1 du_2 + \frac{\partial B_3}{\partial u_3} du_3 h_1 h_2 du_1 du_2$$

y el flujo neto de salida será: $$\frac{\partial (h_1 h_2 B_3)}{\partial u_3} du_1 du_2 du_3$$

Analizando las otras dos caras, análogamente, se tiene que la variación total de flujo es

$$d\Phi_B = [\frac{\partial (h_2 h_3 B_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 B_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 B_3)}{\partial u_3}] du_1 du_2 du_3 \qquad \text{(2-26)}$$

Dividiendo ahora por el volumen elemental: $dV = h_1 du_1 h_2 du_2 h_3 du_3$ Obtenemos:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{d\Phi_B}{dV} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}[\frac{\partial (h_2 h_3 B_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 B_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 B_3)}{\partial u_3}]} \qquad \text{(2-27)}$$

Teniendo en cuenta los tres valores de los factores de escala en los tres sistemas coordenados, podemos formular la divergencia de un campo vectorial en los tres:

1) En coordenadas cartesianas ortogonales: $h_1 = 1 \ ; \ h_2 = 1 \ ; \ h_3 = 1$

$$\therefore \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}} \qquad \text{(2-28)}$$

2) En coordenadas cilíndricas ortogonales: $h_1 = 1 \ ; \ h_2 = \delta \ ; \ h_3 = 1$

$$\therefore \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\delta}\frac{\partial (\delta B_1)}{\partial \delta} + \frac{1}{\delta}\frac{\partial B_2}{\partial \theta} + \frac{\partial B_3}{\partial z}} \qquad \text{(2-29)}$$

3) En coordenadas esféricas ortogonales: $h_1 = 1 \ ; \ h_2 = r \ ; \ h_3 = r \sin\theta$

$$\therefore \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 B_1)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta B_2)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_3}{\partial \varphi}} \qquad \text{(2-30)}$$

<u>Problema 2-3.</u>

Calcular la divergencia de un campo magnético definido por la expresión cartesiana: $\vec{B} = 2M\,\dfrac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2}$

Solución: Poniendo $r^2 = x^2 + y^2$ $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{-2My}{r^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2Mx}{r^2}\right)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \left(\frac{4Myx}{r^4}\right) - \left(\frac{4Mxy}{r^4}\right) = 0$$

El cual era un resultado esperado pues es sabido que la divergencia del campo magnético es nula, por una de las ecuaciones del electromagnetismo.

Problema 2-4.

Calcular la divergencia de un campo eléctrico debido a una carga eléctrica y definido por la expresión

En coordenadas esféricas: $\vec{E} = Q\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

Solución: Utilizando la expresión de la divergencia en coordenadas esféricas, en su única componente según el radio:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 E_1)}{\partial r}$ Reemplazando $E_1 = Q\dfrac{r}{r^3} = \dfrac{Q}{r^2}$ se obtiene: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$

Esto también es un resultado esperado pues la divergencia de un campo eléctrico es nula en los puntos en que no existe una carga eléctrica, puntual o distribuida.

Problema 2-5.

Calcular la divergencia de un campo vectorial dado por:

$$\vec{U} = r\cos\theta\hat{e}_r + r\sin\theta\hat{e}_\theta - r\sin\theta\cos\varphi\hat{e}_\varphi$$

Solución: Utilizando nuevamente la expresión de la divergencia en coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2U_1)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta U_2)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_3}{\partial\varphi}$$

Reemplazando:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^3\sin\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\sin^2\theta)}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\varphi}$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}\cdot\vec{U} = 5\cos\theta + \sin\varphi$$

Rotor de una función vectorial

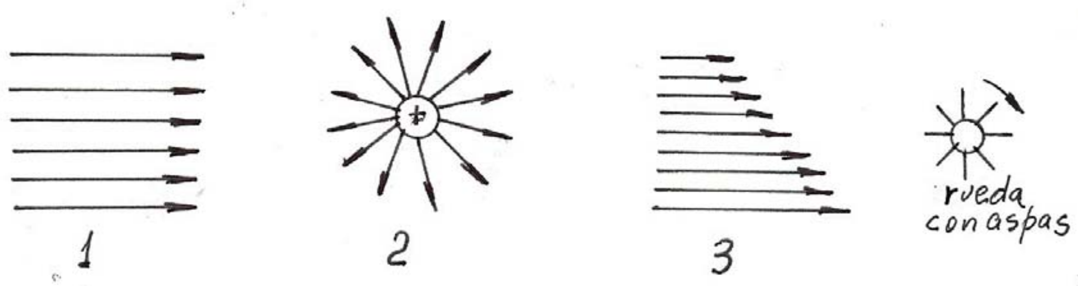
Se puede dar una primera y sencilla definición del operador **Rotor** en coordenadas cartesianas, aplicando nuevamente el mismo operador $(\nabla, Nabla)$ a una función vectorial mediante un producto vectorial.

Si la función vectorial es $\vec{V}$ entonces su producto vectorial con $(\vec{\nabla}\, Nabla)$ será precisamente el **Rotor del campo vectorial**:

$$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \qquad \text{(2-31)}$$

El significado físico del rotor está relacionado con las líneas de fuerza de un campo vectorial como en el caso del campo magnético, del campo eléctrico, del campo gravitatorio o del campo de velocidades de un fluido.

De una forma muy intuitiva, puede decirse que el rotor de una función vectorial mide la capacidad de sus líneas de flujo o de fuerza (en el modelo vectorial del campo) para causar un torbellino.



En la figura se muestran tres tipos diferentes de campos vectoriales con sus líneas de fuerza. En las figuras 1 y 2 si se introduce en esos campos una pequeña rueda con aspas (o rotor) que pueda rotar por efecto de tales líneas de fuerza (asimilables a un fluido en movimiento), la ruedita no va a girar. Diremos que en tales casos el rotor de esos campos vectoriales es nulo.

En el caso de la figura 3, si se introduce la ruedita, ésta comenzará a girar de inmediato ya que la fuerza ejercida por las líneas de fluido con mayor velocidad es mayor que la ejercida por las de menor velocidad. En este caso el rotor de ese campo vectorial no será nulo.

La definición formal de Rotor como integral independiente del sistema de coordenadas, es similar al de divergencia, con la salvedad que ahora el producto es vectorial en lugar de escalar.

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \lim_{\delta V\to 0}\frac{1}{\delta V}\oiint_S d\vec{S}\times\vec{V} = \lim_{\delta V\to 0}\frac{1}{\delta V}\oiint_S \hat{n}\times\vec{V}.dS \qquad \text{(2-32)}$$

La definición de Rotor en coordenadas curvilíneas ortogonales es la expresión:

$$\vec{\nabla}\times\vec{U} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1U_1 & h_2U_2 & h_3U_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(2-33)}$$

La fórmula nos lleva a las expresiones del rotor en los distintos sistemas coordenados.

1) En coordenadas cartesianas ortogonales: $h_1 = 1\ ;\ \ h_2 = 1\ ;\ \ h_3 = 1$ (2-34)

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z})\hat{i} + (\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y})\hat{j} + (\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y})\vec{k}$$

2) En coordenadas cilíndricas ortogonales: $h_1 = 1\ ;\ \ h_2 = \delta\ ;\ \ h_3 = 1$

$$\vec{\nabla}\times\vec{U} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{e}_\delta}{\delta} & \hat{e}_\theta & \frac{\hat{k}}{\delta} \\ \frac{\partial}{\partial \delta} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_1 & \delta U_2 & U_3 \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}35)$$

3) En coordenadas esféricas ortogonales: $h_1 = 1\ ;\ \ h_2 = r\ ;\ \ h_3 = r\sin\theta$

$$\vec{\nabla}\times\vec{U} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{e}_r}{r^2\sin\theta} & \frac{\hat{e}_\theta}{r\sin\theta} & \frac{\hat{e}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ U_1 & rU_2 & r\sin\theta U_3 \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}36)$$

O sea:

$$\vec{\nabla}\times\vec{U} = \frac{1}{r\sin\theta}[\frac{\partial(\sin\theta.U_3)}{\partial\theta} - \frac{\partial U_2}{\partial\varphi}]\hat{e}_r + [\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_1}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rU_3)}{\partial r}]\hat{e}_\theta + $$
$$+\frac{1}{r}[\frac{\partial(r.U_2)}{\partial r} - \frac{\partial U_1}{\partial\theta}]\hat{e}_\varphi$$

<u>Problema 2-6.</u> Dos importantes resultados son los siguientes, que deberá demostrar el lector.

Primero. Si $\vec{B} = \vec{\nabla}\varphi \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = 0$

Segundo. Si $\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{B} \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0$

Gradiente de un campo vectorial.

Retomando la fórmula de la derivada direccional de una función escalar, (2-9) que tiene por expresión $\frac{d\Psi_1}{dq} = \hat{e} \cdot \vec{\nabla}\Psi_1$, consideremos ahora un campo vectorial $\vec{F} = F_1\,\hat{i} + F_2\,\hat{j} + F_3\,\hat{k}$ formado por tres funciones escalares; si éstas son derivables, podremos calcular su derivada direccional en $P(x, y, z)$ según la dirección $\hat{e}$ mediante una fórmula similar a la anterior: $\frac{d\vec{F}}{dq} = \hat{e} \cdot \vec{\nabla}\vec{F}$ en donde se define como gradiente de un campo o función vectorial, en coordenadas cartesianas, al producto cartesiano entre dos vectores, uno de ellos el operador $\vec{\nabla}$ y una función vectorial como $\vec{F}$, (ver en el capítulo 1 las fórmulas (1-19) y (1-19)'):

Producto cartesiano entre $\vec{\nabla}(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}, \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}, \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}) \;\; y \;\; \vec{F}(F_1\hat{i}, F_2\hat{j}, F_3\hat{k})$ (2-37)

Donde el gradiente de la función vectorial asume la expresión de 9 productos:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\vec{F} = & \frac{\partial F_1}{\partial x}\hat{i}\hat{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\hat{i}\hat{j} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\hat{i}\hat{k}' + \\ & + \frac{\partial F_1}{\partial y}\hat{j}\hat{i} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\hat{j}\hat{j} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\hat{j}\hat{k} + \\ & + \frac{\partial F_1}{\partial z}\hat{k}\hat{i} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\hat{k}\hat{j} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\hat{k}\hat{k}\end{aligned} \qquad (2\text{-}38)$$

Que también puede agruparse matricialmente en forma de tres vectores columna:

$$\vec{\nabla}\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}39)$$

Y del cual su interpretación se podrá apreciar mediante algunos ejemplos.

Ejemplo 2-3.

1.-) Hallar el gradiente del vector posición $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

Dado que, evaluando las 9 derivadas de las componentes de $\vec{r}(r_1, r_2, r_3)$
Y reemplazándolas en (2-39) se obtiene:

$$\vec{\nabla}\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{I}$$ Llamado matriz identidad o unidad.

2.-) Si en lugar del vector posición fuese la función vectorial

$\vec{p} = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$, su gradiente sería:

$$\vec{\nabla}\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El gradiente de una función vectorial tiene las propiedades de los invariantes matriciales, el primero es la divergencia, como sumas de las derivadas de la diagonal principal (ver (2-39)):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

El segundo es el rotor que se obtiene como diferencias de las componentes opuestas a la diagonal principal:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z})\hat{i} + (\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x})\hat{j} + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\hat{k}$$

Las cuales pueden deducirse de la fórmula (2-37) como productos escalares y vectoriales de los dos vectores $\vec{\nabla}$ y $\vec{F}$.

Cálculo de la divergencia:

$$\vec{\nabla}(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}, \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}, \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}) \cdot \vec{F}(F_1\hat{i}, F_2\hat{j}, F_3\hat{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \qquad (2\text{-}40)$$

Cálculo del rotor (teniendo presente las reglas $\begin{matrix} \hat{i}\times\hat{i} = 0 & \hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} \\ \hat{j}\times\hat{j} = 0 & \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i} \\ \hat{k}\times\hat{k} = 0 & \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j} \end{matrix}$):

$$\vec{\nabla}(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}, \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}, \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}) \times \vec{F}(F_1\hat{i}, F_2\hat{j}, F_3\hat{k}) =$$
$$= (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z})\hat{i} + (\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x})\hat{j} + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\hat{k} \qquad (2\text{-}41)$$

Problema 2-7.

Calcular el gradiente, la divergencia y el rotor de la función vectorial:

$$\vec{B} = (x-y)\hat{i} + (y-z)\hat{j} + (z-x)\hat{k}$$

Solución:

Utilizando la fórmula (2-39)

$$\vec{\nabla}\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial x} & \frac{\partial B_2}{\partial x} & \frac{\partial B_3}{\partial x} \\ \frac{\partial B_1}{\partial y} & \frac{\partial B_2}{\partial y} & \frac{\partial B_3}{\partial y} \\ \frac{\partial B_1}{\partial z} & \frac{\partial B_2}{\partial z} & \frac{\partial B_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la divergencia con la fórmula (2-40) y la matriz anterior:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 3$$

Cálculo del rotor con la fórmula (2-41) y la matriz anterior:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

Observar que una vez hallado el gradiente de la función vectorial, la divergencia y el rotor se obtienen directamente de la matriz. En el problema siguiente se podrán apreciar bien esas características.

Problema 2-8.

Calcular el gradiente, la divergencia y el rotor de la función vectorial:

$$\vec{B} = (yz^2)\hat{i} + (zx^2)\hat{j} + (xy^2)\hat{k}$$

Solución:

Utilizando la fórmula (2-39)

$$\vec{\nabla}\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial x} & \frac{\partial B_2}{\partial x} & \frac{\partial B_3}{\partial x} \\ \frac{\partial B_1}{\partial y} & \frac{\partial B_2}{\partial y} & \frac{\partial B_3}{\partial y} \\ \frac{\partial B_1}{\partial z} & \frac{\partial B_2}{\partial z} & \frac{\partial B_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2zx & y^2 \\ z^2 & 0 & 2xy \\ 2yz & x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene de inmediato: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

y $\vec{\nabla}\times\vec{B} = (2xy - x^2)\hat{i} + (2yz - y^2)\hat{j} + (2zx - z^2)\hat{k}$

Problema 2-9.

Calcular la divergencia y el rotor de la función vectorial:

$$\vec{U} = r\cos\theta\hat{e}_r + r\sin\theta\hat{e}_\theta - r\sin\theta\cos\varphi\hat{e}_\varphi$$

Solución: Utilizando nuevamente las expresiones de la divergencia y del rotor en coordenadas esféricas:

Divergencia: $$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2U_1)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta U_2)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_3}{\partial\varphi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = 3\cos\theta - 2\cos\theta + \sin\varphi = \cos\theta + \sin\varphi$$

Rotor:

$$\vec{\nabla}\times\vec{U} = \frac{1}{r\sin\theta}[\frac{\partial(\sin\theta.U_3)}{\partial\theta} - \frac{\partial U_2}{\partial\varphi}]\hat{e}_r + [\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_1}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rU_3)}{\partial r}]\hat{e}_\theta +$$

$$+\frac{1}{r}[\frac{\partial(r.U_2)}{\partial r} - \frac{\partial U_1}{\partial\theta}]\hat{e}_\varphi$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{U} = -2\cos\theta\cos\varphi\hat{e}_r - 2\sin\theta\cos\varphi\hat{e}_\theta + 3\sin\theta\hat{e}_\varphi$$

Fórmulas de Gradiente-Divergencia-Rotor.

0.- Fundamentales: $\boxed{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = 0; \quad \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0}$

1.- $\vec{\nabla}(\varphi+\psi) = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\psi$

2.- $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$

3.- $\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{B}$

4.- $\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{A}) = \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{A} + \varphi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$

5.- $\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{A}) = \vec{\nabla}\varphi\times\vec{A} + \varphi(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

6.- $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

7.- $(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla}B_x)\hat{i} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla}B_y)\hat{j} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla}B_z)\hat{k}$

8.- $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$

9.- $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

10.- $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{\nabla}^2\vec{B}$

11.- $\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

Integrales curvilíneas y de superficie.

Con los campos escalares y vectoriales existe la posibilidad de calcular otras funciones que no sean las diferenciales: con ellos pueden efectuarse integraciones a lo largo de líneas, sobre superficies o dentro de volúmenes.

Las primeras integrales se denominan integrales curvilíneas, que en el caso de tener una función vectorial que **sea una fuerza se denomina trabajo de la fuerza** a lo largo de una curva o trayectoria.

Si el campo vectorial tiene líneas de fuerza, las mismas conforman un flujo que al atravesar una superficie cerrada o no, podrá ser medido por una integral de superficie o integral de flujo.

En el caso de integrales de volumen, generalmente se trata de una función escalar dentro de un cierto volumen que informa del valor de su contenido.

Integral de línea o trabajo de una fuerza

1.-) Si una curva viene dada en coordenadas paramétricas: $x = x(t); y = y(t)$ y $z = z(t)$, y si $\vec{F}(x, y, z)$ es un campo de fuerzas, denominamos circulación o integral curvilínea entre dos puntos $A\ y\ B$ a la expresión:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde el elemento de trayectoria $d\vec{r}$ viene expresado en función del parámetro t: $d\vec{r} = dx(t)\hat{i} + dy(t)\hat{j} + dz(t)\hat{k}$

Tenemos la siguiente integral:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B [F_1(t) \cdot \dot{x}(t) + F_2(t) \cdot \dot{y}(t) + F_3(t) \cdot \dot{z}(t)]dt = \int_A^B \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}dt \quad \text{(2-42)}$$

Si la integral curvilínea se calcula alrededor de una curva cerrada C entonces se suele poner:

$$\oint_C [F_1(t) \cdot \dot{x}(t) + F_2(t) \cdot \dot{y}(t) + F_3(t) \cdot \dot{z}(t)]dt = \oint_C \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}dt \quad \text{(2-42)'}$$

2.-) Si la curva viene expresada en forma explícita $y = f(x)$, para el caso de un plano, entonces la integral curvilínea tiene la forma:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B [F_1 \cdot dx + F_2 \cdot dy] \quad \text{(2-43)}$$

Y se reemplazan los valores de $x; y$ sobre la curva respectiva.

<u>Ejemplo del caso 1.-)</u>

Sea el campo vectorial $\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$ y la curva de integración viene dada por las ecuaciones: $x = r\cos\varphi\ ;\ y = r\sin\varphi$ donde $r = cte.\ y\ \varphi$ es el parámetro.

Hallar la integral curvilínea entre los valores $\varphi = 0\ y\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

<u>Solución</u>

Usaremos la expresión: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}d\varphi = \int_0^{\pi/2} (-ydx + xdy)$

Donde $dx = -r\sin\varphi.d\varphi\ \ y\ \ dy = r\cos\varphi.d\varphi$

Reemplazando: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (-ydx + xdy) = \int_0^{\pi/2} (r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi).d\varphi = \frac{\pi}{2}r^2$

<u>Ejemplo del caso 2.-)</u>

Sea el campo vectorial $\vec{A} = y^2\hat{i} - x^2\hat{j}$, calcular su circulación entre los puntos $P_1(0,0)\ y\ P_2(2,3)$ por las siguientes trayectorias:

a) Por la quebrada $(y = 0\ ;\ x = 0\ ;\ x = 2)\ \ y\ \ (x = 2\ ;\ y = 0\ ;\ y = 3)$

b) Por la recta $y = \frac{3}{2}x$ c) La parábola $y = \frac{3}{4}x^2$

Solución. Usaremos la fórmula: $\int_A^B \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_A^B [A_1 \cdot dx + A_2 \cdot dy]$

a) Por $y = 0$ $\int_0^2 y^2 dx = 0$ Luego Por $x = 2$ $\int_0^3 -x^2 dy = -12$

b) Por $y = \frac{3}{2}x$ $\int_A^B [A_1 \cdot dx + A_2 \cdot dy] = \int_0^2 [\frac{9}{4}x^2 dx - x^2\frac{3}{2}dx] =$

$$= \frac{1}{4}x^3\Big|_0^2 = 2$$

c) Por $y = \frac{3}{4}x^2$ $\int_A^B [A_1 \cdot dx + A_2 \cdot dy] = \int_0^2 [\frac{9}{16}x^4 dx - \frac{3}{2}x^3 dx]$

$$= (\frac{9}{80}x^5 - \frac{3}{8}x^4)\Big|_0^2 = -2,4$$

Circulación del Vector Gradiente.

Cuando un campo vectorial es un campo de Gradientes,

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla}\Phi(x,y,z) \qquad (2\text{-}44)$$

Su circulación entre dos puntos o en un camino cerrado, tiene un resultado que no depende del camino elegido sino solamente de los puntos final e inicial. Si la circulación es cerrada y el punto final coincide con el inicial, la integral curvilínea es nula. Es decir, si $\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi$ entonces

$$\int_P^Q \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} = \int_P^Q (\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz) = \int_P^Q d\Phi = \Phi_Q - \Phi_P \qquad (2\text{-}45)$$

Por ser la diferencia entre dos funciones escalares, su valor no dependerá del camino. Además si los puntos inicial y final son coincidentes, evidentemente será:

$$\Phi_P - \Phi_P = 0$$

Esta característica es de gran importancia para la Física ya que muchas fuerzas con que trata son gradientes de funciones escalares o potenciales. Tanto las fuerzas gravitatorias como las electrostáticas derivan de un potencial escalar y por lo tanto son gradientes.

En Física, las fuerzas que derivan de un potencial se definen como $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi$ con un signo negativo que significa que la fuerza tiene dirección contraria a la que tiene el vector posición del punto de aplicación de la fuerza. Ejemplos son la fuerza gravitatoria y la fuerza elástica.

Otra importante característica de las fuerzas que derivan de un potencial escalar, llamadas conservativas, es la verificación de tener rotor nulo.

O, sea, si: $$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Phi) = 0 \qquad (2\text{-}46)$$

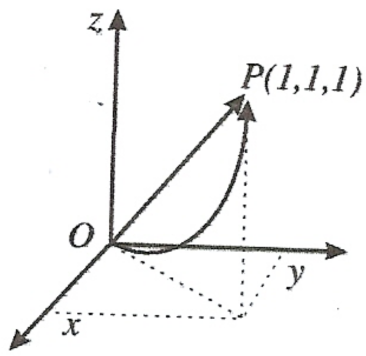
Problema 2-10.

Dado el campo vectorial $\vec{G} = \vec{\nabla}\Phi$ que deriva de la función escalar de punto

$$\Phi = 5xz^2 + 2yx^2$$

(verificar que $\vec{G}$ equivale a:)

$$\vec{G} = (5z^2 + 4yx)\hat{i} + 2x^2\hat{j} + 10xz\hat{k}$$



Hallar su circulación entre O y P por los caminos:

1.- Por la quebrada $x - y - z$

2.- Por la recta que une O con P

3.- Por la parábola que pasa por O y P

Solución:

1.

a.- Primera circulación entre $x = 0$ y $x = 1$ con las demás coordenadas nulas.

$$\int_O^P \vec{G} \cdot d\vec{r} = 0$$

b.- La segunda circulación se hace entre $y = 0$ e $y = 1$ con $x = 1 = cte.$ por lo tanto $dx = 0$ y $z = 0$.

$$\int_O^P \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_O^P 2x^2 dy = 2x^2 y = 2$$

c.- La tercera circulación se hace entre $z = 0$ y $z = 1$ con $x = y = 1 = cte$ y por lo tanto $dx = dy = 0$

$$\int_O^P \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_O^P 10xzdz = \frac{10}{2} xz^2 = 5$$

La circulación total es: $$\int_O^P \vec{G} \cdot d\vec{r} = 7$$

2. La siguiente circulación es por la recta que une los dos extremos.

La ecuación de la recta es $x = y = z \therefore dx = dy = dz$

$$\int_O^P \vec{G}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (5x^2+4x^2)dx + \int_0^1 2y^2dy + \int_0^1 10z^2dz = 7$$

3. La última circulación es por la parábola con vértice en O. La ecuación de la parábola es la intersección del paraboloide $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ con el plano vertical $x=y$. Reemplazando este valor en la ecuación del paraboloide, resulta:

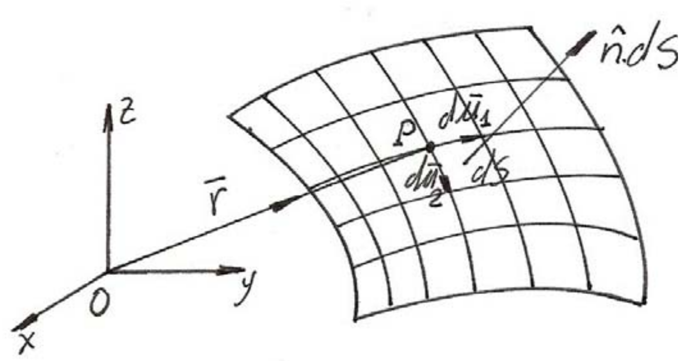
$$z = x^2 \ \therefore \ dz = 2xdx$$

Y la integral será: $\int_0^1 (5x^4+4x^2)dx + \int_0^1 2x^2dx + \int_0^1 20x^4dx = 7$

Hemos comprobado que la circulación del gradiente por cualquier camino da el mismo valor. También es posible comprobar que el $\vec{\nabla}\times\vec{G}=0$ que se dejará al lector.

Integrales de superficie o flujo, de un campo vectorial

Siendo $S(x,y,z)=Cte$ una superficie en el espacio, por ejemplo un paraboloide de revolución dado por la ecuación $z=x^2+y^2$, puede definirse sobre ella un elemento de superficie dS cuya expresión dependerá del sistema de coordenadas elegido para definir la superficie.



Si además la superficie es atravesada por las líneas de fuerza de un cierto campo vectorial $\vec{B}(x,y,z)$, se llama flujo del campo $\vec{B}$ a través de la superficie S a la integral:

$$\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B}\cdot \hat{n}.dS \qquad (2\text{-}47)$$

Siendo $d\vec{S}$ un elemento de superficie orientado en la dirección a su normal unitaria en cada punto. Esa normal se define como saliente para las superficies cerradas y en las demás superficies se define en función de si es convexa (saliente) o cóncava (entrante).

Los problemas siguientes ilustrarán la forma de cálculo del flujo de un campo vectorial.

Problema 2-11

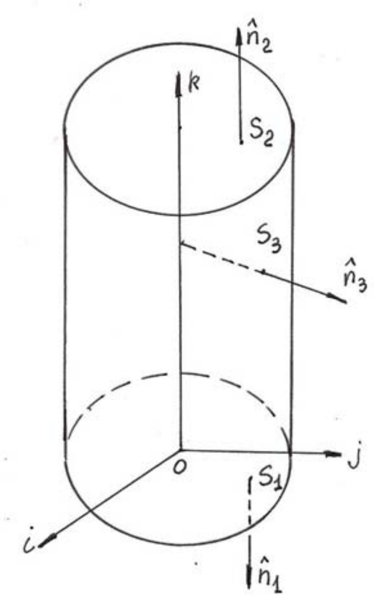
Las líneas de fuerza de un campo vectorial $\vec{B}$ atraviesan un cilindro de radio $R=3$ y altura $h=3$.

Como el campo $\vec{B}$ es definido también en coordenadas cilíndricas, dadas las características simétricas de la figura que atraviesa, por:

$$\vec{B} = \delta \hat{e}_\delta - 3z\hat{k}$$

Calcular el flujo total a través del cilindro.

Solución.



1.-) Cálculo del flujo a través de la superficie S_1.

La fórmula es $\iint\limits_{S_1} \vec{B} \cdot \hat{n}.dS \begin{cases} \hat{n}_1 = -\hat{k} \\ z = 0 \end{cases}$

El elemento de superficie en S_1 debe expresarse en coordenadas polares y su valor es: $dS = \delta.d\delta.d\varphi$

Por lo cual la integral se convierte en:

$$\iint\limits_{S_1} \vec{B} \cdot \hat{n}.dS = \iint\limits_{S_1} 3zdS = \iint\limits_{S_1} 3z.\delta.d\delta.d\varphi = 0$$

La primera integral del flujo a través de la base del cilindro es nula pues $z = 0$.

2.-) Cálculo del flujo a través de la superficie S_2 tapa del cilindro.

Nuevamente la fórmula es: $\iint\limits_{S_2} \vec{B} \cdot \hat{n}.dS \begin{cases} \hat{n}_2 = \hat{k} \\ z = 3 \end{cases}$

Y el elemento de superficie es nuevamente $dS = \delta.d\delta.d\varphi$

Reemplazando: $\iint\limits_{S_2} \vec{B} \cdot \hat{n}.dS = \iint\limits_{S_2} -3zdS = \iint\limits_{S_2} -3z.\delta.d\delta.d\varphi =$

$$\iint\limits_{S_2} -3z.\delta.d\delta.d\varphi = \int_0^R -3z.\delta.d\delta \int_0^{2\pi} d\varphi = -81\pi \text{ pues } R = 3 \;\; y \;\; z = h = 3$$

3.-) Cálculo del flujo a través de la superficie S_3 lateral del cilindro.

Nuevamente la fórmula es: $\iint\limits_{S_3} \vec{B} \cdot \hat{n}.dS \begin{cases} \hat{n}_3 = \hat{e}_\delta \\ \delta = R = 3 \end{cases}$

El elemento de superficie lateral del cilindro es: $dS = R.d\varphi.dz$

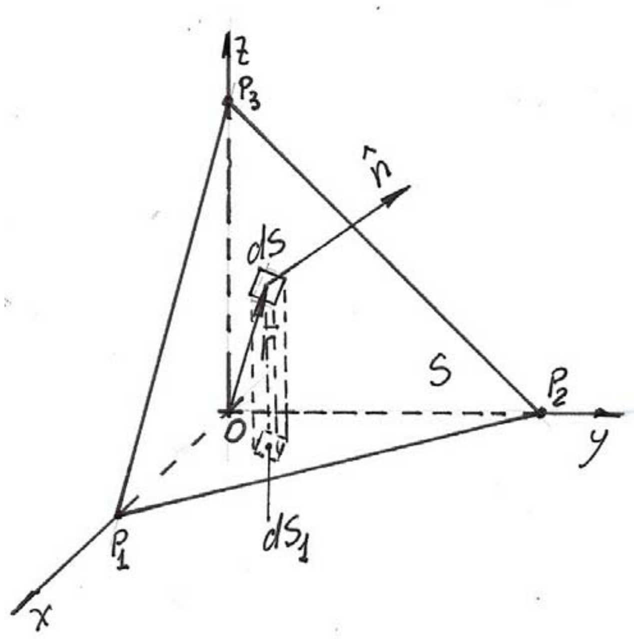
Reemplazando: $\iint\limits_{S_3} \vec{B} \cdot \hat{n}.dS = \iint\limits_{S_3} R.\delta.d\varphi.dz =$ dado que $\delta = Cte. = R$

$$\iint_{S_3} R.\delta.d\varphi.dz = R^2\int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\varphi = 54\pi$$

Por lo tanto el flujo total a través del cilindro es la suma de los tres $\boxed{\Phi_{Total} = -27\pi}$

Problema 2-12.

Hallar el flujo de un campo vectorial $\vec{H} = x^2\hat{i} + 2yz\hat{j} + y^3\hat{k}$ a través de la superficie del plano definido por los tres puntos $P_1(1,0,0)$ $P_2(0,2,0)$ y $P_3(0,0,2)$.



Solución.

Deberá primeramente buscarse la ecuación del plano S que pasa por los tres puntos dados y a través del cual pasarán las líneas de fuerza, o sea, el flujo del campo vectorial.

La ecuación de la superficie S, o sea del plano definido por tres puntos, se obtiene a partir de la ecuación del plano: $\dfrac{x}{P_{1x}} + \dfrac{y}{P_{2y}} + \dfrac{z}{P_{3z}} = 1$ denominada ecuación segmentaria del plano, donde P_{1x} es la coordenada del punto P_1 donde el plano corta el eje x: ídem con los demás valores.

Por lo tanto la ecuación del plano será: $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} = 1$ o también de la forma equivalente: $\boxed{2x + y + z = 2}$ (**)

Es frecuente usar su forma explícita; $\boxed{z = 2 - 2x - y}$

La expresión (**) de la ecuación del plano es la llamada normal o hessiana y sus coeficientes son proporcionales a los cosenos directores del plano. Para obtenerlos bastará dividir por el módulo formado por sus coeficientes:

$$\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Por lo tanto la ecuación del plano también es: $\frac{2}{\sqrt{6}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z=\frac{2}{\sqrt{6}}$

Pero como los cosenos directores del plano son también las componentes del versor normal al plano, podemos definir al versor normal con la ecuación:

$$\boxed{\hat{n}=\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}}$$

Utilizando ahora la expresión general del flujo: $\iint_S \vec{H}\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{H}\cdot\hat{n}.dS$

El producto escalar de $\vec{H}\cdot\hat{n}=\frac{2}{\sqrt{6}}x^2+\frac{1}{\sqrt{6}}2yz+\frac{1}{\sqrt{6}}y^3$

Que deberá integrarse sobre la superficie del plano.

Un forma de realizar la integración en esas condiciones es poniendo la expresión anterior en función de x e y solamente, utilizando la función explícita del plano para reemplazar la variable z.

Además, para asegurarnos de que estamos sobre el plano recurrimos a la proyección de la superficie elemental dS sobre el plano x,y de la forma:

$$dS_1=dS\cos(\hat{n}:\hat{k})=\frac{1}{\sqrt{6}}dS$$

Y como el elemento de superficie en el plano x,y es el producto simple

$$dS_1=dx.dy$$

La integral del flujo será:

$$\iint_S \vec{H}\cdot\hat{n}.\frac{dS_1}{1/\sqrt{6}}=\sqrt{6}\iint_S \left(\frac{2}{\sqrt{6}}x^2+\frac{1}{\sqrt{6}}2yz+\frac{1}{\sqrt{6}}y^3\right)dx.dy$$

Reemplazando z por su expresión explícita y agrupando términos, nos quedará:

$$\iint_S (2x^2+4y-4xy-2y^2+y^3)dx.dy$$

Integrando ahora con dos integrales, una según y y otra según x teniendo especial cuidado con los límites de integración en cada caso, se tendrá:

$$\int_0^2 dy\int_{x=1-\frac{y}{2}}^{0}(2x^2+4y-4xy-2y^2+y^3)dx$$

El límite inferior de x resulta de considerar la recta $\overline{P_1P_2}$ n el plano x, y para el valor de $z=0$, de la cual resulta la ecuación de la recta $y = 2-2x \rightarrow x = 1-\dfrac{y}{2}$

Integrando ambas integrales, con la última se tiene:

$$\left[\frac{y^5}{10}-\frac{17}{48}y^4+\frac{y^3}{2}-\frac{y^2}{2}-\frac{2}{3}y\right]_0^2 = -1,8$$

Que es el flujo total a través de la superficie del plano.

Teorema de la divergencia o de Gauss.

El importante teorema de la divergencia establece que dado un campo vectorial $\vec{B}$ con derivadas parciales continuas en la región S, el flujo de dicho campo a través de una superficie cerrada S sobre la cual la normal externa $\hat{n}$ existe y es continua, es igual a la integral de volumen de la divergencia de $\vec{B}$ extendida al volumen encerrado por la superficie S.

En su expresión analítica:

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{B}\cdot \hat{n}.dS = \iiint_\Gamma (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})d\Gamma \quad \text{(2-48)}$$

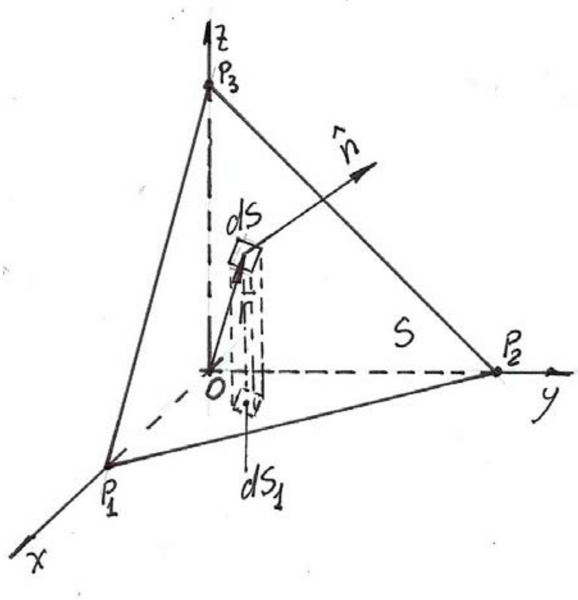
La demostración de este teorema se deriva de la definición intrínseca de la divergencia (2-25) . Unos problemas aclararán los conceptos y al forma operativa de usar el teorema.

Problema 2-13.

Comprobar el teorema de Gauss para el campo vectorial:

$$\vec{B} = (4x-z)\hat{i} + 2x\hat{j} - 4z\hat{k}$$

a través de las superficies del prisma que se ilustra y que es el mismo que en el **problema 2-12** .



Primera Parte: Comenzaremos con hallar el flujo del campo $\vec{B}$ a través de las 4 superficies que conforman el prisma.

1.-) Cálculo del flujo a través de la superficie $P_1P_2P_3$.

Vimos que la ecuación del plano era: $2x+y+z=2$ y su normal unitaria era también: $\hat{n}=\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$..

El producto escalar $\vec{B}\cdot\hat{n}=\frac{2}{\sqrt{6}}(4x-z)+\frac{2x}{\sqrt{6}}-\frac{4z}{\sqrt{6}}$

La integral del flujo a través de esta superficie es:

$$\iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}.\frac{dS_1}{1/\sqrt{6}}=\sqrt{6}\iint_S\left(\frac{8x-2z}{\sqrt{6}}+\frac{2x}{\sqrt{6}}-\frac{4z}{\sqrt{6}}\right)dx.dy$$

Y como en esta superficie el valor de la variable $z=2-2x-y$ debe reemplazarse para la integración:

$$\iint_{S_1}(22x+6y-12)dx.dy$$

O sea: $$\int_0^2 dy\int_{x=1-\frac{y}{2}}^{0}(22x+6y-12)dx=\int_0^2\left(1+\frac{1}{4}y^2-y\right)dy$$

Cuyo valor final en $P_1P_2P_3$ es: $$\left[y+\frac{y^3}{12}-\frac{y^2}{2}\right]_0^2=\frac{8}{12}$$

2.-) Cálculo del flujo a través de la superficie OP_1P_2.

Aquí la superficie de integración está en el plano x,y y el producto escalar de $\vec{B}$ con la normal a dicho plano es $\vec{B}\cdot(-\hat{k})$ ya que debe tomarse en el sentido saliente a la superficie. El flujo a través de esa superficie será:

$$\iint_S 4z.dx.dy$$

Como además el valor de la variable z es nulo en ese plano, tendremos:

$$\iint_S 4z.dx.dy=0$$

3.-) Cálculo del flujo a través de la superficie OP_2P_3.

Aquí la superficie de integración está en el plano y,z y el producto escalar de $\vec{B}$ con la normal a dicho plano es $\vec{B}\cdot(-\hat{i})$ ya que debe tomarse en el sentido saliente a la superficie. El flujo a través de esa superficie será:

$$\iint_S -(4x-z)dy.dz$$

En este plano de superficie, el valor de la variable x es nulo, por lo tanto:

$$\iint_S z.dy.dz = \int_0^2 dy \int_{z=2-y}^{0} z.dz = \int_0^2 -\frac{1}{2}(2-y)^2 dy = -\frac{8}{6}$$

4.-) Cálculo del flujo a través de la superficie OP_3P_1.

Aquí la superficie de integración está en el plano z,x y el producto escalar de $\vec{B}$ con la normal a dicho plano es $\vec{B}\cdot(-\hat{j})$ ya que debe tomarse en el sentido saliente a la superficie. El flujo a través de esa superficie será:

$$\iint_S -2x.dx.dz$$

Integrando sobre ese plano:

$$\iint_S -2x.dx.dz = \int_0^2 dz \int_{x=1-\frac{z}{2}}^{0} -2x.dx = \int_0^2 (1-\frac{z}{2})^2 dz = \frac{8}{12}$$

Sumando ahora los 4 flujos: $$\Phi_T = \frac{8}{12} - \frac{8}{6} + \frac{8}{12} = 0$$

Segunda Parte. Hallaremos ahora la integral de volumen de la divergencia en el volumen del prisma.

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{B}\cdot\hat{n}.dS = \iiint_\Gamma (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})d\Gamma$$

Hallamos primero la divergencia del campo vectorial:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\left[(4x-z)\hat{i} + 2x\hat{j} - 4z\hat{k}\right] = 0$$

Como la divergencia es nula, la integral de volumen será nula, por lo tanto se verifica el teorema de Gauss.

El teorema de Gauss permite hallar el flujo de un campo vectorial a divergencia nula (campo solenoidal) a través de una superficie compleja con mayor facilidad.

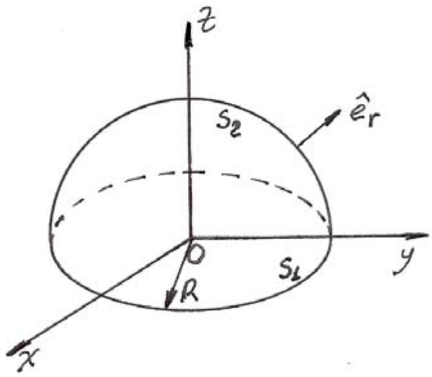
Supongamos que en el caso anterior se pidiera hallar el flujo del campo $\vec{B}$ a través del plano $P_1P_2P_3$ solamente. En ese caso se reemplaza el cálculo a través de esa superficie por el cálculo más simple a través de los tres planos coordenados $x,y - y,z - z,x$ y luego se suman los tres valores cuyo resultado será igual y de signo contrario al flujo pedido.

Problema 2-14.

Verificar el teorema de la divergencia para el campo vectorial

$$\vec{E} = r\cos\theta\hat{e}_r + r\sin\theta\hat{e}_\theta + r\sin\theta\cos\varphi\hat{e}_\varphi$$

Utilizando como superficie de integración y como volumen, la semiesfera de radio R.



Primera Parte: Primeramente hallaremos el flujo del campo $\vec{E}$ a través de las 2 superficies que conforman la semiesfera.

1.-) Cálculo del flujo a través de la superficie de la base S_1.

El flujo saliente a través de la base se calcula con el producto escalar del campo $\vec{E}$ con la normal a la base $\hat{e}_\theta$, o sea, el plano formado por la ecuación $\theta = cte. = \frac{\pi}{2}$.

$$\vec{E}\cdot\hat{e}_\theta = r\sin\theta$$

Y el flujo a través de la base se calcula para una superficie elemental: $dS = r.d\varphi.dr$

$$\iint_S \vec{E}\cdot\hat{n}.dS = \iint_{S_1} r^2\sin\theta.d\varphi.dr$$

Debe considerarse que en la base de la semiesfera el ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, por lo cual la integral será:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr = \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3} d\varphi = \frac{2\pi R^3}{3}$$

2.-) Cálculo del flujo a través de la superficie de la semiesfera S_2.

El flujo saliente a través de la semiesfera se calcula con el producto escalar del campo $\vec{E}$ con la normal a la misma $\hat{e}_r$.

$\vec{E}\cdot\hat{e}_r = r\cos\theta$ que al ser sobre la superficie $\vec{E}\cdot\hat{e}_r = R\cos\theta$

Y el flujo a través de la base se calcula para una superficie elemental:

$$dS = Rd\theta.R\sin\theta d\varphi$$

Y la integral es:

$$\iint_S \vec{E}\cdot\hat{n}.dS = \int_0^{2\pi} R^3 d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta.d\theta = \int_0^{2\pi} R^3 d\varphi \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \pi R^3$$

El flujo total es la suma de ambos $\Phi_T = \dfrac{5\pi R^3}{3}$

Segunda Parte. Hallaremos ahora la integral de volumen de la divergencia en el volumen de la semiesfera.

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}.dS = \iiint_\Gamma (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})d\Gamma$$

Hallaremos la divergencia del campo vectorial

$$\vec{E} = r\cos\theta\hat{e}_r + r\sin\theta\hat{e}_\theta + r\sin\theta\cos\varphi\hat{e}_\varphi$$

en coordenadas esféricas.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E_1)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_2)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_3}{\partial\varphi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 5\cos\theta - \sin\varphi$$

Integrando:

$$\iiint_\Gamma (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})d\Gamma = \iiint_\Gamma (5\cos\theta - \sin\varphi)d\Gamma$$

El elemento de volumen esférico vale:

$$d\Gamma = r^2\sin\theta.dr.d\theta.d\varphi$$

Dividiendo la integral triple:

$$\iiint_\Gamma (5\cos\theta - \sin\varphi)d\Gamma = \int_0^R r^2dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} (5\cos\theta - \sin\varphi)d\varphi =$$

$$= \int_0^R r^2dr \int_0^{\pi/2} 5\sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi - \int_0^R r^2dr \int_0^{\pi/2} 5\sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi$$

$$= \frac{5\pi R^3}{3}$$

Que coincide con el resultado anterior.

Una propiedad muy importante del teorema de la divergencia en la Física está relacionada con el **"principio de continuidad"**. El mismo se expresa diciendo que el flujo neto de masa de un cierto fluido saliendo de una superficie cerrada está balanceado por la disminución de materia en el interior de la superficie. Lo cual es una forma de expresar el principio de conservación de la masa.

Simbólicamente se escribe como $\vec{\nabla}\cdot(\delta\vec{v}) = -\dfrac{\partial\delta}{\partial t}$, siendo $\vec{v}$ la velocidad de un fluido. El decrecimiento de la densidad en cada volumen elemental de fluido es proporcional al flujo de masa $(\delta\vec{v})$ que sale del elemento de volumen. El término divergencia significa escape del fluido o fluido saliente.

Si el fluido es un líquido incompresible, se dará que $\dfrac{\partial\delta}{\partial t} = 0 \;\therefore\; \vec{\nabla}\cdot(\delta\vec{v}) = 0$

que especifica que la densidad deberá mantenerse constante en todo el circuito y también que en un intervalo de tiempo lo que entra en un volumen es igual a lo que sale.

En la Física existen otras ecuaciones de continuidad. En el caso de la corriente eléctrica, si definimos con $\vec{j}$ su densidad (cantidad de carga que atraviesa por segundo la unidad de área del conductor), se tendrá que $\vec{j}\cdot\hat{n}\,d\sigma$ es la carga que por segundo atraviesa un elemento de área de magnitud $d\sigma$. Y siendo δ la unidad de carga eléctrica por unidad de volumen, la ecuación de continuidad es:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\delta}{\partial t} = 0 \tag{2-49}$$

Cuyo significado es que las cargas eléctricas no se crean ni se destruyen nunca.

Otras dos ecuaciones del electromagnetismo, relacionadas con la divergencia, son

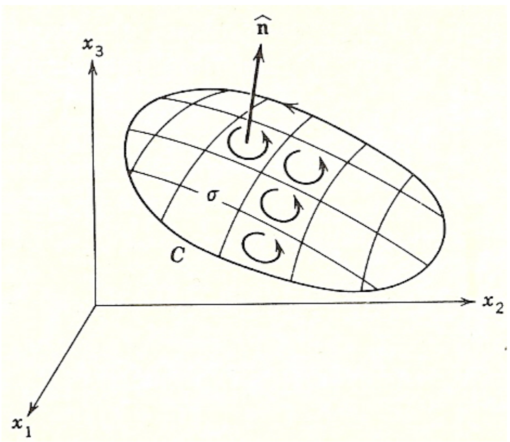
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$: la divergencia de la inducción magnética es nula.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\delta}{\varepsilon_0}$: la divergencia de un campo eléctrico creado por cargas, es proporcional a la densidad de carga.

<u>Teorema de Stokes o del Rotor.</u>

El rotor de un campo vectorial $\vec{F}$ tiene una definición debida al teorema de Stokes:

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{n} = \lim_{\delta\sigma\to 0}\frac{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}}{\sigma} \tag{2-50}$$



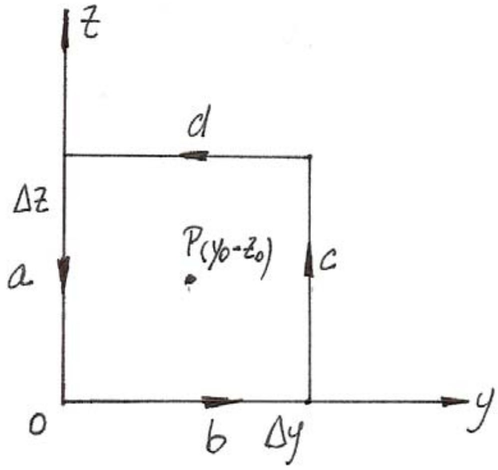
El límite de la circulación del campo vectorial $\vec{F}$ alrededor de una curva elemental cerrada C dividido el elemento de área encerrada, equivale a la proyección del rotor del campo $\vec{F}$ sobre la normal a la superficie teniendo en cuenta la regla del tirabuzón para el sentido de la normal respecto a la circulación de $\vec{F}$ alrededor de C.

Cuando interesa analizar las características rotacionales de las líneas de un campo vectorial para detectar la presencia o no de torbellinos, se estudia el proceso de circulación del campo $\vec{F}$ en un contorno cerrado del espacio sobre el cual actúa dicho campo.

Consideremos el campo $\vec{F}$ en las cercanías del punto $P(y_0, z_0)$ en el centro de una superficie rectangular elemental $\Delta\sigma$ de aristas $\Delta y, \Delta z$.

La circulación neta de $\vec{F}$ alrededor de P se obtiene haciendo tender a cero la superficie $\Delta\sigma$.

$$\lim_{\delta\sigma \to 0} \frac{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}{\delta\sigma}$$



Vimos que la fórmula de la circulación por los caminos $a, b, c\ y\, d$ era:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_b F_y dy + \int_c F_z dz - \int_d F_y dy - \int_a F_z dz$$

Utilizando la aproximación de Taylor para circular por las aristas cercanas a P, en la superficie elemental cuya normal es $\hat{n} = \hat{i}$, se tiene:

$$Circ.de\,\vec{F} = [F_y(y_0, z_0) - \frac{\partial F_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}]_b \Delta y + [F_z(y_0, z_0) + \frac{\partial F_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}]_c \Delta z -$$

$$-[F_y(y_0, z_0) + \frac{\partial F_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}]_d \Delta y - [F_z(y_0, z_0) - \frac{\partial F_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}]_a \Delta z$$

Sumando todo: $Circ.de\,\vec{F} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z})\Delta y \Delta z$

Que representa la componente del rotor de $\vec{F}$ en el plano y, z multiplicado por el elemento de superficie cuya normal es $\hat{n} = \hat{i}$. Haciendo que la superficie $\Delta\sigma = \Delta y \Delta z$ tienda a cero, se tendrá:

Finalmente:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n}\Delta\sigma \qquad o\ en\ su\ clásica\ \ forma$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} = \lim_{\delta\sigma \to 0} \frac{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}{\Delta\sigma}} \qquad (2\text{-}51)$$

Por otra parte, si integramos $\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_\sigma \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n}.d\sigma}$ (2-52)

Obtenemos la expresión del teorema de Stokes, la circulación del campo vectorial $\vec{F}$ alrededor de la curva cerrada C es igual al flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de la superficie encerrada por C, con los recaudos del sentido de la circulación dado que el rotor de un campo vectorial es un seudo vector.

<u>Consecuencia del teorema de Stokes</u>

Se ha visto que si el rotor de un campo vectorial es nulo dicho campo vectorial es un campo de gradientes (ver Problema 2-6). En tal caso, ese campo de gradientes deriva de una función escalar o potencial Φ.

En el problema se demostraba que si $\vec{U} = \vec{\nabla}\Phi \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{U} = 0$

Por lo tanto, si $\vec{\nabla} \times \vec{U} = 0 \rightarrow \vec{U} = \vec{\nabla}\Phi$

En tal caso la circulación cerrada también será nula:

$$Si\ \vec{\nabla} \times \vec{U} = 0 \ \rightarrow \ \iint_{\sigma} \vec{\nabla} \times \vec{U} \cdot \hat{n}.d\sigma = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{\oint_C \vec{U} \cdot d\vec{r} = 0} \tag{2-53}$$

Como la circulación sobre **cualquier** circuito cerrado es nula, podemos imaginar que la circulación sobre una curva cerrada es suma de dos circulaciones: una entre OA y la otra entre AO, por lo tanto su suma será nula y en consecuencia podremos poner:

$$\int_{OA} \vec{U} \cdot d\vec{r} = \int_{AO} \vec{U} \cdot d\vec{r}$$

Para campos vectoriales que derivan de un potencial, su integral curvilínea entre dos puntos, no depende del camino recorrido y su valor siempre es el mismo para cualquier trayecto dependiendo únicamente de los puntos inicial y final.

Además, por ser el campo de gradientes $\vec{U} = \vec{\nabla}\Phi$ la expresión

$$\int_O^A \vec{U} \cdot d\vec{r} = \int_O^A \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} = \int_O^A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot d\vec{r} = \int_O^A d\Phi = \Phi_A - \Phi_O$$

Es decir, el valor de la integral curvilínea entre OA será igual a la diferencia de valores de la función potencial Φ entre el punto A y el punto O. Esta importante consecuencia se apreciará mejor al tratar los problemas de dinámica gravitacional.

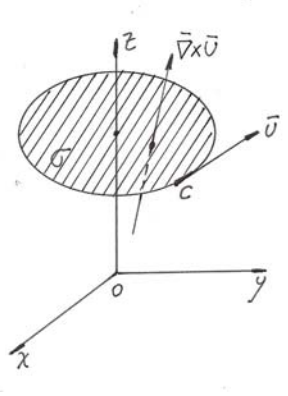
<u>Problema 2-15.</u>

Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial

$$\vec{H} = (x+2y)\hat{i} + (x-2y)\,\hat{j} + xyz\hat{k}$$

a través de la superficie circular de ecuaciones paramétricas:

$$x = \cos\theta;\;\; y = \sin\theta;\;\; z = 3$$



Solución:
a) Valor de la circulación sobre la circunferencia.

Como $\begin{aligned} H_x &= \cos\theta + 2\sin\theta \\ H_y &= \cos\theta - 2\sin\theta \\ H_z dz &= 0 \end{aligned}$ y además $\begin{aligned} dx &= -\sin\theta.d\theta \\ dy &= \cos\theta.d\theta \\ dz &= 0 \end{aligned}$

$$\oint_C (-2\sin^2\theta + \cos^2\theta - 3\sin\theta\cos\theta)d\theta =$$

Reemplazando: $$\int_0^{2\pi} (-2\sin^2\theta + \cos^2\theta - 3\sin\theta\cos\theta)d\theta = -\pi$$

b) Valor del flujo del rotor.

El rotor es: $\vec{\nabla}\times\vec{H} = xz\hat{i} - yz\hat{j} - \hat{k}$ y la normal es $\hat{n} = \hat{k}$

Luego el flujo es: $$\iint_\sigma \vec{\nabla}\times\vec{H}\cdot\hat{n}.d\sigma = \iint_\sigma -1d\sigma = -\pi R^2 = -\pi$$

Al ser $R = 1$

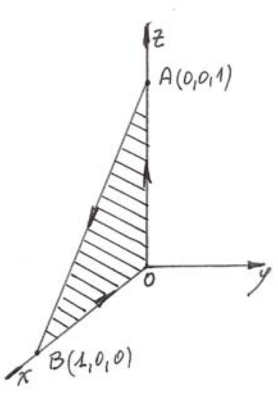
Verificándose el teorema.

Problema 2-16.

Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial

$$\vec{B} = (x+y)\hat{i} + (y-x)\,\hat{j} + (x-y-z)\hat{k}$$

a través del triángulo de la figura y circulando en su contorno de manera que su normal sea $\hat{n} = \hat{j}$.



Solución:

a) Valor de la circulación alrededor del triángulo.

Entre $\overline{OA}$ $\int_O^A \vec{B}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (x-y-z)dz = -\frac{1}{2}z^2\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}$ pues $x = y = 0$

Entre $\overline{AB}$ donde la ecuación de la recta es $x = 1 - z$, la circulación es:

$$\int_A^B \vec{B}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 x.dx - \int_1^0 (x-z)dz = \frac{1}{2}$$

Entre $\overline{BO}$ $\int_O^A \vec{B}\cdot d\vec{r} = \int_1^0 x.dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^0 = -\frac{1}{2}$

Sumando los tres valores: Circulación total $= -\frac{1}{2}$

b) Cálculo del flujo del rotor:

El rotor es: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ $\quad y\ la\ normal\ \hat{n} = \hat{j}$

Luego el flujo es: $\iint_\sigma \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot\hat{n}.d\sigma = \iint_\sigma -1 d\sigma = -\frac{1}{2}$

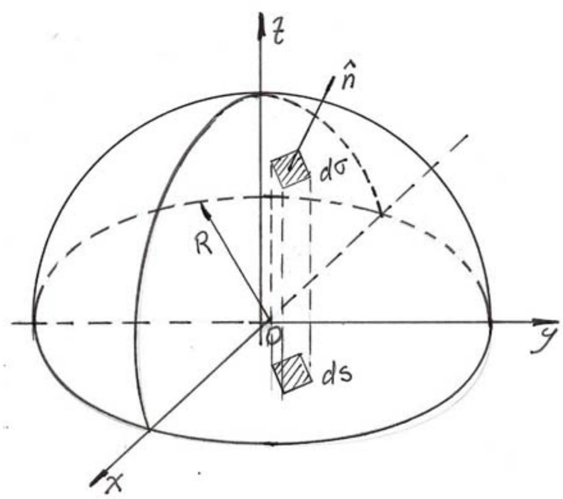
Verificándose el teorema.

Problema 2-17.

Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial

$$\vec{A} = 2xy\hat{i} - (y-x)\hat{j} + \\ + zx\hat{k}$$

a través del casquete esférico de la figura y circulando por su circunferencia base.



a) Hallaremos primero el flujo del rotor:

Rotor del campo vectorial: $\vec{\nabla}\times\vec{A} = -z\hat{j} + (1-2x)\hat{k}$

El flujo debe calcularse sobre el casquete esférico externo y como el rotor está en coordenadas cartesianas, la integral del flujo la pondremos en las mismas coordenadas.

$$\iint_{\sigma} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \hat{n}.d\sigma \quad (**)$$

La normal a la superficie esférica se halla como cociente entre el gradiente de la función que define la superficie esférica y su módulo.

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla}\varphi}{\left|\vec{\nabla}\varphi\right|}$$ donde la ecuación superficie esférica es

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$\therefore \ \hat{n} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{R}$$

El elemento de superficie $d\sigma$ sobre la esfera, se lo puede proyectar sobre el plano x, y con la fórmula

$$dS = d\sigma \cos\theta = dx.dy$$

Y dado que el $\cos\theta = \hat{n} \cdot \hat{k} = \dfrac{z}{R}$ Reemplazando todo en $^{(**)}$, se obtiene:

$$\iint_S [-z\hat{j} + (1-2x)\hat{k}] \cdot [\frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{R}] \frac{dx.dy}{z/R} =$$

$$= \iint_S (1 - 2x - y)dx.dy$$

La última integral sobre la superficie circular en la base del plano x, y conviene resolverla en coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = \delta\cos\varphi \\ y = \delta\sin\varphi \end{cases}$$

Donde el elemento de superficie viene dado por $dx.dy = dS = \delta.d\delta.d\varphi$

$$\iint_S (1-2x-y)dx.dy = \iint_S (1 - 2\delta\cos\varphi - \delta\sin\varphi)\delta.d\delta.d\varphi$$

Resolviendo la integral:

$$\int_0^R d\delta \int_0^{2\pi} \delta(1 - 2\delta\cos\varphi - \delta\sin\varphi)d\varphi = \int_0^R 2\pi\delta.d\delta = \pi R^2$$

b) Calcularemos ahora la circulación del campo vectorial $\vec{A}$ sobre la circunferencia base.

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Pasando todo a coordenadas polares y teniendo en cuenta que en el plano x, y la variable z es nula y que además el radio δ es ahora constante: $\delta = R$ con las ecuaciones de transformación $\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$

$$\int_C 2xy.dx - \int_C (y-x)dy =$$

$$\int_0^{2\pi} 2R^2 \sin^2\varphi\cos\varphi.d\varphi - \int_0^{2\pi} R^2(\sin\varphi - \cos\varphi)\cos\varphi.d\varphi$$

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi.d\varphi = \pi R^2$$

Verificándose el teorema.

Teoremas de Green

Si se tiene el producto de una función escalar $\varphi(x, y, z)$ por el vector gradiente de otra función escalar $\psi(x, y, z)$ tal que $\varphi\vec{\nabla}\psi$ sea el producto buscado, si se le aplica el teorema de Gauss o de la divergencia, se obtiene:

$$\oiint_\sigma (\varphi\vec{\nabla}\psi)\cdot\hat{n}d\sigma = \iiint_\Gamma \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{\nabla}\psi)d\Gamma$$

Aplicando la fórmula ya vista $\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\varphi)\cdot\vec{A} + \varphi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$ al producto anterior, se obtiene:

$$\iiint_\Gamma \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{\nabla}\psi)d\Gamma = \iiint_\Gamma (\psi\nabla^2\varphi + \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi)d\Gamma \qquad (2\text{-}54)$$

Esta ecuación es conocida como primera identidad de Green.

Si se intercambian los roles de las dos funciones:

$$\oiint_\sigma (\psi\vec{\nabla}\varphi)\cdot\hat{n}d\sigma = \iiint_\Gamma \vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{\nabla}\varphi)d\Gamma = \iiint_\Gamma (\varphi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi)d\Gamma$$

Restando ahora ambas integrales:

$$\iiint_\Gamma (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)d\Gamma = \oiint_\sigma (\varphi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\varphi)\cdot\hat{n}d\sigma \qquad (2\text{-}55)$$

Se obtiene una nueva ecuación conocida también como segunda identidad de Green. Ambas fórmulas se denominan en común como **teorema de Green.** Tienen especial aplicación en las teorías del potencial tanto gravitatorio como eléctrico.

Cuando se vio la derivada direccional, se dijo que el $\vec{\nabla}\varphi$ era un vector normal a la superficie definida por la función φ. Por lo tanto la expresión $\vec{\nabla}\varphi \cdot \hat{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ coincide con el módulo de la derivada de la función en la dirección de su normal, lo cual se aprovecha para escribir el teorema de Green en forma más sencilla:

$$\iiint_{\Gamma} (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi) d\Gamma = \oiint_{\sigma} (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}) d\sigma \qquad (2\text{-}56)$$

La expresión $\nabla^2\varphi$ se denomina Laplaciano de la función escalar φ o del potencial φ.

Se corresponde con la divergencia del gradiente del potencial φ, y su fórmula completa en coordenadas cartesianas ortogonales es:

$$\nabla^2\varphi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \qquad (2\text{-}57)$$

Las funciones φ que satisfacen la condición $\nabla^2\varphi = 0$ se denominan funciones armónicas. Una muy importante es la $\varphi(r) = \frac{c}{r}$ siendo r el vector posición en el espacio. Para el plano, la función armónica es $\varphi(r) = c.\ln r$.

El Laplaciano en coordenadas cilíndricas se indica a continuación:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial \delta}(\delta \frac{\partial \varphi}{\partial \delta}) + \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \qquad (2\text{-}58)$$

Y en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \qquad (2\text{-}59)$$

<u>Tipos de campos vectoriales</u>

Ciertos campos vectoriales típicos y que ocurren con frecuencia en los fenómenos físicos, tienen nombres específicos acordes con sus características.

Por ello se habla de campos de torbellino o de rotores, campos de gradientes o conservativos, campos solenoidales, etc.

<u>1.-) Campos conservativos, de gradientes o irrotacionales</u>

Se define como campo de gradientes al campo vectorial que deriva de una función potencial a través de la condición:

$$\vec{A} = \pm\vec{\nabla}\varphi$$

donde la función $\varphi(x, y, z)$ se llama potencial escalar o simplemente función potencial.

Los campos conservativos son muy utilizados en la teoría física de la gravitación y en la dinámica newtoniana de las fuerzas elásticas y gravitatorias. Las principales características de estos campos son:

a) Gradiente: $\vec{A} = \pm\vec{\nabla}\varphi$

b) Rotor: $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$ Campo irrotacional.

c) Circulación: $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0$

d) Independencia del camino: $C_1\int_P^Q \vec{A}\cdot d\vec{r} = C_2\int_P^Q \vec{A}\cdot d\vec{r}$

e)Existencia de la función potencial: $\varphi(r) = \int_{ro}^{r} \vec{A}\cdot d\vec{r}$

Como ejemplo de la última condición, supongamos un campo de gradientes

$$\vec{A} = (2x+z)\hat{i} + y^2\hat{j} + x\hat{k}$$

Para hallar la función potencial origen, la forma más simple es hallar la circulación del campo $\vec{A}$ desde el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y circulando por las rectas quebradas $O - P_1(x,0,0);\ P_1 - P_2(x,y,0);\ P_2 - P_3(x,y,z)$.

Con los recaudos tomados en el Problema 2-10 para el cálculo de la circulación por las rectas quebradas, en el presente caso, quedan las integrales:

$$\varphi(r) = \varphi(x,y,z) = \int_0^x (2x+z)dx + \int_0^y y^2 dy + \int_0^z xdz$$

Y la función potencial será: $\varphi(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{3}y^3 + xz + Cte.$

Que resultará definida a menos de una constante.

Otro ejemplo es el campo gravitatorio terrestre.

La fuerza existente entre dos masas ubicadas a una distancia $r_{(x,y,z)} = |\vec{r}|$ está dada por la fórmula $\vec{F}_r = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{e}_r$.

Para hallar su función potencial usaremos la fórmula $\varphi(r) = \int_{ro}^{r} \vec{A}\cdot d\vec{r}$, partiendo desde un punto de referencia r_0 arbitrario:

$$\varphi(r) = -GMm\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = GMm(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0})$$

Esta función potencial tiene el significado físico del trabajo realizado por el campo de fuerzas entre los dos puntos. Como el trabajo es independiente del trayecto, es un caso típico de que la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa.

La energía potencial gravitatoria se define como $\boxed{U_r = -G\frac{Mm}{r}}$, con signo negativo para caracterizar al trabajo efectuado por fuerzas exteriores, en contra del campo gravitatorio, para trasladar la masa m desde un punto ubicado en el infinito, o sea con $\frac{1}{r_0} = \frac{1}{\infty} = 0$, hasta la distancia r.

2.-) Campos de rotores o campos solenoidales

Si tenemos un campo vectorial $\vec{B}$ tal que sea $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ se tendrá que:

$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0}$ y al campo $\vec{B}$ se lo designa como campo solenoidal.

De lo cual deducimos que: **todo campo de rotores es un campo solenoidal.**

Y también puede demostrarse que si $\vec{B}$ es un campo solenoidal, existirá otro campo de vectores $\vec{F}$ tal que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$.

Las propiedades de los campos solenoidales se resumen en:

a) Flujo a través de una superficie cerrada: $\oiint_{\sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} d\sigma = 0$

b) El flujo de $\vec{B}$ es constante a lo largo de un tubo de campo, tal como se define un campo de rotores. Un campo solenoidal muy conocido es el campo magnético.

c) La condición de ser un campo solenoidal implica que existe un campo $\vec{F}$ tal que: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$

El campo de vectores $\vec{F}$ se denomine potencial vectorial del campo $\vec{B}$, por su similitud con el caso anterior del potencial escalar.

Como ejemplo, consideremos el campo solenoidal $\vec{B} = 2xy\hat{i} - y^2\hat{j} + x^2\hat{k}$ del cual deseamos hallar su potencial vectorial.

Para hallarlo aplicamos la fórmula $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ de la cual se puede deducir:

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) = B_x \;;\; \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) = B_y \;;\; \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = B_z$$

Para simplificar algo la solución podemos asumir que $\boxed{F_x = 0}$

Con lo cual:

$$F_y = \int B_z dx + f_2(y,z)$$

$$F_z = -\int B_y dx + f_3(y,z)$$

Reemplazando estos valores en la primera componente del rotor:

$$B_x = \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} - \int \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) dx$$

Pero como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ tenemos la relación

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = -\left(\frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)$$

Reemplazando en la anterior: $B_x = \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} + \int \frac{\partial B_x}{\partial x} dx$

Simplificando nuevamente, aunque se pierda generalidad, la cual no interesa pues se busca una solución particular, asumimos que $\boxed{f_2 = 0}$ y en tal caso integrando:

$$B_x = \frac{\partial f_3}{\partial y} + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial B_x}{\partial x} dx = \frac{\partial f_3}{\partial y} + [B_x(x, y, z) - B_x(x_0, y, z)]$$

Si igualamos $f_3 = \int B_x(x_0, y, z) dy$ obtenemos la solución de la ecuación en B_x y en consecuencia:

$$\boxed{F_z = -\int B_y dx + \int B_x(x_0, y, z) dy}$$

Que junto con: $F_y = \int B_z dx + f_2(y, z) \rightarrow \boxed{F_y = \int B_z dx}$ pues $\boxed{f_2 = 0}$

Obteniendo las tres condiciones para hallar las componentes del potencial vectorial, que como se ve están sujetas a la condición que tengan derivada primera en todo el ámbito de su definición.

Integrando: $F_y = \int B_z dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$

$$F_z = -\int B_y dx + \int B_x(x_0, y, z) dy = y^2 x + \int 2 x_0 y dy = y^2 x$$

Pues puede elegirse como valor particular de $x_0 = 0$.

Con lo cual el potencial vectorial, a menos de una función gradiente arbitraria $\vec{\nabla}\varphi(x, y, z)$, es el valor:

$$\vec{F} = \frac{1}{3} x^3 \hat{j} + y^2 x \hat{k} + \vec{\nabla}\varphi(x, y, z)$$

De cual puede comprobarse que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{B} = 2xy\hat{i} - y^2 \hat{j} + x^2 \hat{k}$

3.-) Campos armónicos

Así se denominan los campos escalares, o funciones escalares, que verifican la ecuación del Laplaciano:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi)=\nabla^2\varphi=0 \quad \text{Ecuación de Laplace.} \qquad (2\text{-}60)$$

Sea, por ejemplo la función escalar: $\varphi(x,y,z)=y^4 z-6x^2y^2z-xyz$

El gradiente es: $\vec{\nabla}\varphi=4x^3z\,\hat{i}-12x^2yz\,\hat{j}-xy\,\hat{k}$

Y su divergencia: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi)=\nabla^2\varphi=12x^2z-12x^2z=0$

Verificándose que la función $\varphi(x,y,z)$ es una función armónica.

La ecuación de Laplace o Laplaciano está relacionada con la ecuación de las ondas:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\omega_0^2(\nabla^2\varphi)=0 \qquad (2\text{-}61)$$

y también con las soluciones de problemas con ecuaciones diferenciales a derivadas parciales que implican fijar condiciones de borde.

Ejemplo del electromagnetismo. Una de las ecuaciones de Maxwell está referida al campo de inducción magnética $\vec{B}$ especificando que es un campo solenoidal en el cual las líneas de fuerza son cerradas formando un flujo constante a lo largo de un tubo de campo. La ecuación de Maxwell es:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \;\therefore\; \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Así mismo, para los campos eléctricos, las ecuaciones de Maxwell establecen que:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\delta_e}{\varepsilon_0} \qquad (2\text{-}62)$$

Y para el caso especial de campos eléctricos estacionarios $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$, o sea, el campo eléctrico es el gradiente de su potencial eléctrico, y por lo tanto:

$$-\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}V)=-\nabla^2V=\frac{\delta_e}{\varepsilon_0} \qquad (2\text{-}63)$$

Que es conocida como la ecuación de Poisson para la electrostática.