## TEMARIO



# Boletín Matemático


Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada
de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales




Número 8
Diciembre 2001
Año 5


UNIVERSIDAD DE MORÓN

Registro de la propiedad intelectual ISSN 0329-0255

**Autoridades de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales**

**Decano**
Dr. Jorge Emilio Salvel

**Vicedecano**
Dr. Miguel G. Skubic

**Secretaria Académica**
Prof. Elsa Noemí Lauro

**Director de Estudios y Coordinación**
Dr. José Domingo Mazza

**Secretaria Adjunta**
Dra. Maria Isabel Antognoli
Dr. Alberto Lobato: Coordinador de Carreras

**Consejeros del Honorable Consejo Académico**
**de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales**
Dr. Eduardo Favier-Dubois
Dra. Alicia I. de Montagut
Dr. Juan Carlos Bonzano
Dr. Sergio Ghedin
Lic. Jorge Enrique Lema
Dr. Carlos M. Trueba

**Representante de Profesores ante el H. C. S.**
Dr. Juan Carlos Lavignolle

**Directores de Carrera:**
Dr. Ernesto Merlo
Lic. Oscar Malfitano Cayuela
Lic. Enrique Ventura
Dr. Carlos Ferreras
Lic. Hugo Pavón Castex
Lic. Luis A. Leo
Dra. Amanda Llistosella
Lic. Guillermo Garberi

**Directores de Institutos de Investigación:**
Dr. Isaac A. Senderovich
Dr. Alfredo E. Villafañe
Dr. Omar A. Pertierra
Ing. Santos D. Soldano
Dr. Juan Ferrari Herrero
Dr. Eduardo M. Favier Dubois
Dr. Horacio A. Irigoyen
Prof. Elvira Venturo

Año 5 Número 8

Diciembre 2001

A modo de Editorial

## A modo editorial

Cuando se habla de un crecimiento exponencial de los conocimientos y su aplicación en la sociedad, generalmente no reparamos en la dimensión de esta reflexión.

Desde el punto de vista estrictamente matemático, el crecimiento exponencial de una función ocurre cuando la variable está actuando como exponente sobre un determinado valor base.

Asimilándolo con la frase mencionada, el conocimiento está representando la función y el tiempo transcurrido, la variable. La afirmación inicial implica que, en menor cantidad de tiempo, el progreso operado por los conocimientos y su aplicación es sustancialmente mayor.

Un análisis sucinto nos permite decir que, si partimos de una referencia válida para contar el tiempo, por ejemplo 1730, donde comienzan a vislumbrarse los primeros síntomas de la llamada Revolución Industrial, podemos aceptar que demandó 100 años, hasta 1830, el perfeccionamiento y la utilización de la máquina a vapor de Watt y el telégrafo de Morse.

Entre 1830 y 1905, es decir en los 75 años siguientes, se logró desarrollar el teléfono, la lámpara eléctrica, el motor a explosión, el telégrafo sin hilo, el vuelo aéreo y el tubo electrónico de rayos catódicos.

Sesenta años mas tarde, entre 1905 y 1965, se obtienen el primer computador analógico, el computador digital, el transistor, los diversos lenguajes de programación, comenzando por el Fortram, los satélites y el comienzo de las comunicaciones satelitales y el casete de audio.

En 20 años, desde 1965 hasta 1985 se logran obtener y aplicar comercialmente: el circuito integrado, el video juego y el video reproductor, se comienza a trabajar en Internet, el chip electrónico, el fax; el sistema operativo DOS, el teléfono celular, el CD-ROM.

Desde 1985 hasta hoy han pasado tan solo 16 años y entre otros avances notables se encuentran la fibra óptica, el microprocesador, el desarrollo incesante de Internet, el aumento en la capacidad y velocidad en acumulación, procesamiento y transmisión de datos, la realidad virtual, la televisión digital y un sinnúmero de aplicaciones de la tecnología digital en los mas variados campos.

Como estamos comprobando en nuestros días, el formidable crecimiento tecnológico ha potenciado la informática, que es seguramente la protagonista descollante que define esta época y que ha impuesto incluso su vocabulario.

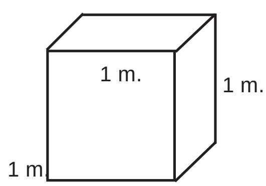
¿Qué ocurrirá en este iniciado siglo? ¿Hacia donde se desplazarán los conocimientos? ¿Se habrá llegado al fin de esta era? ¿Como será la nueva era post información? ¿Cuándo aparecerán los primeros síntomas? ¿Se mantendrá el crecimiento exponencial de los conocimientos?

Son sólo algunos apasionantes interrogantes todavía sin respuestas.

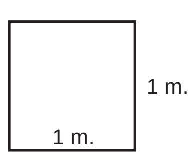
# Un problema relacionado con el cubo y su resolución por medio de un Teorema de Euler

**Por Juan Carlos Lopez (*)**

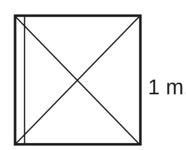
**El problema a resolver es el siguiente:** construir un cubo por sus aristas utilizando, para éstas, un alambre que no tiene cortes y que es lo mas corto posible. Cada arista puede ser recorrida por el alambre las veces que se desee.




Por ensayos con alambre o haciendo dibujos, se obtiene el valor de 15 metros.¿Podrá obtenerse con menos alambre?
Se puede ensayar tomando el dibujo del cubo como un grafo (dibujo formado por líneas). Convendría, para fijar ideas, empezar con figuras más sencillas, como un cuadrado de 1 metro de lado.

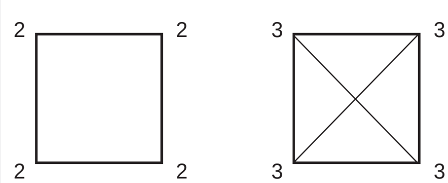



Se ve que se necesitan 4 metros de alambre. Ninguna arista tiene doble alambre.
En el grafo

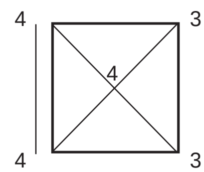



es necesario que uno de los lados tenga doble alambre. Su longitud será:
l=5m+2v2m=7, 82 m

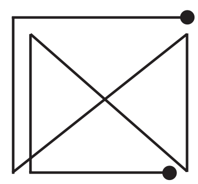
Aparentemente, este problema es similar al de dibujar un grafo de un solo trazo sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por la misma línea, que ya fue resuelto por el matemático Euler y que dice: "la condición necesaria y suficiente es que, de cada uno de los vértices del grafo parta un número par de líneas, excepto, a la sumo, dos vértices, en que ese número de líneas que parten puede ser impar."
En los grafos anteriores tenemos, en los vértices:



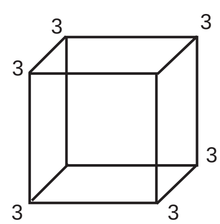
El primero entra dentro del enunciado del teorema. El segundo no, pero si duplicamos una arista, sí:



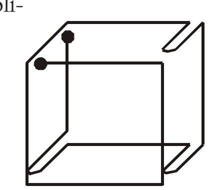

Esto entra dentro del enunciado del teorema. He aquí el trazo (o su equivalente con alambre):



Volvamos ahora a nuestro cubo que, proyectado sobre el plano, es un grafo.




Tiene nada menos que 8 vértices con número impar de líneas salientes, pero si se duplican 3 aristas, queda en la forma



que es la solución del problema con el mínimo de alambre (ya que al grafo original se agregan las 3 líneas más cortas que es posible trazar y se deja el máximo de 2 vértices con número impar de salidas). Contando el número de aristas recorridas se llega a 15, o sea que la longitud de alambre mínima es 15 metros, que coincide con el resultado obtenido por ensayo y error.

**(*) Profesor de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales**

# El denominado: "Enfoque monetario de la balanza de pagos"

**Por el Prof. Alfredo Eduardo Villafañe (*)**

Existen expresiones que suelen ser difíciles de interpretar, especialmente para quienes leen o escuchan temas económicos. Muchos estudiantes se han acercado pidiendo aclaraciones sobre lo que se ha querido señalar con esa expresión. Aunque para algunos el concepto es elemental, para otros es confuso. Trataré de explicarlo brevemente:

La expresión es relativamente reciente. Son manifestaciones que se acuñan, dentro de estudios e investigaciones de ciertos analistas. En este caso correspondieron las apreciaciones a los economistas, J.Polak, R.Mundell y H. Johnson, integrantes del centro de investigaciones del FMI, y de sus alumnos de la Universidad de Chicago. La investigación fue realizada en la década de los años cincuenta y sesenta.

Se parte de la concepción, ya conocida, de un mercado de dinero en equilibrio, o sea:

$$\frac{Ms}{P} = L(R,Y) \qquad (1)$$

Donde:
**Ms**=oferta monetaria (determinada por el banco central)
**P** = nivel de precios
**R** =tipo de interés
**Y** =renta nacional
**L ( R, Y )**=demanda de dinero agregada real

La igualdad (1) señala que la oferta monetaria, en términos reales, es igual a la demanda de dinero en los mismos términos. Si introducimos ahora E, que identificamos como el valor en moneda nacional de los activos externos del banco central y A, que sería el de sus activos internos, equivalente al crédito interno; y aplicando el multiplicador de moneda K ( que vincula los activos del banco central con la oferta de moneda) se tendrá:

$$Ms = K(E + A) \qquad (2)$$

La variación de las reservas exteriores en un lapso determinado, $\Delta E$, en el caso de un país cuya moneda no sea divisa reserva, es igual al saldo de su balanza de pagos. Relacionando (1) con (2), nos da pié para expresar las reservas externas del banco central como:

$$E = \frac{1}{K} P\,L(R, Y) - A \qquad (3)$$

Suponiendo K constante, el superávit de la balanza de pagos será:

$$\Delta E = \left(\frac{1}{K}\right) \Delta\,[PL(R,Y)] - \Delta A \quad (4)$$

Precisamente, ***esta ecuación es la que resume el enfoque monetario.***

¿ Qué nos expresa uno de los términos de (4) ? - Nos indica las variaciones de la deman-

da nominal del dinero, y nos dice que - si todo lo demás permanece constante - un incremento de la demanda de moneda repercutirá en un superávit en la balanza de pagos; y un aumento de la oferta monetaria, mantendrá el mercado de dinero **en equilibrio.**
El otro término de la ecuación del saldo de la balanza de pagos, refleja los factores de la oferta en el mercado de dinero.
Si todo lo demás permanece constante, un aumento del crédito interno incrementa la oferta monetaria en relación a su demanda; en este caso la balanza deberá reflejar un déficit para disminuir la oferta monetaria y restablecer el equilibrio en el mercado monetario.

Como el concepto existente sobre la balanza de pagos es que ésta es igual a la suma de la cuenta corriente y la cuenta de capital, sin incluir aquí las reservas, gran parte de los análisis y estudios explicaban las variaciones de la balanza de pagos como el resultado de las variaciones de la cuenta corriente o de su cuenta capital. El enfoque monetario ha contribuido, en el sentido que destaca que en muchas situaciones, los problemas de la balanza de pagos son el resultado directo de desequilibrios en el mercado monetario y, en consecuencia, una solución basada en la política monetaria puede ser la mas apropiada. Con éste razonamiento, un déficit pronunciado de la balanza de pagos podría ser el resultado de un exceso en la creación de crédito interno. El enfoque monetario sugiere que un déficit sería el resultado de una disminución de la demanda de exportaciones.
Estos enfoques monetarios, constituyen un instrumento analítico muy útil, aunque su aplicación deba realizarse con cautela en la búsqueda de soluciones a problemas macroeconómicos. Es bastante interesante en su aplicación en políticas económicas, sobre todo ante los problemas producidos por las variaciones de la demanda de dinero y oferta monetaria interna.

**Resumiemdo:** ***el enfoque monetario de la balanza de pagos es una forma de analizarla, que sugiere que las variaciones de las reservas del banco central pueden ser interpretadas como el resultado de los cambios en el mercado de dinero. Esto surge de la estrecha relación entre la balanza de pagos de un país y su oferta monetaria.***

**Bibliografía**: The Monetary Approach to the Balance of Payments-
FMI-1977

**(*) Director del Instituto de Investigaciones Económicas de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Morón**

# Sistemas de ecuaciones lineales

## Método de eliminación de Gauss vs. Regla de Cramer

**Por el Prof. Angel Ferrari (*)**

**1.- Introducción.-**

Sean **m** y **n** dos enteros mayores que 1. Consideremos el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, definido por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Si llamamos **A** a la matriz de **m** por **n** de coeficientes del sistema, **B** a la matriz de **m** por **1** de los términos independientes, y **X** a la matriz de **n** por **1** de las incógnitas, es decir:

(**)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix},$$

entonces ( 1 ) se puede expresar mediante la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X = B \qquad (2)$$

A su vez, si llamamos $A^j$ a la j-ésima columna de A, j=1,...,n, esto es:

$$A^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

-------------------------

(**) Suponemos, obviamente, que A no es toda nula. Sí podría serlo B.

( 2 ) puede escribirse como

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot A^j = B \qquad (3)$$

Observemos, además, que $A^1, A^2, \ldots, A^n, B$ son vectores del espacio vectorial $R^m$.

Llamemos **r** al rango de la matriz A;
**r’** al rango de la matriz de m por n+1: A|B, conocida como **matriz ampliada** o **matriz orlada** del sistema.
Es claro que

$$1 \le r \le \text{mín}\,\{m,n\} \qquad (4)$$

$$1 \le r' \le \text{mín}\,\{m,n+1\} \qquad (5)$$

$$r' = r \quad \text{ó} \quad r' = r+1 \qquad (6)$$

**2.- Campo de aplicación**

Tanto el Método de Eliminación de Gauss (E.G.) (triangulación), como el Gauss-Jordan (G.J.) (diagonalización), pueden aplicarse a sistemas cualesquiera sean m y n, en tanto que la Regla de Cramer sólo se aplica a sistemas con m = n (cuadrados) y que *además sean compatibles determinados, es decir, el caso con* $|A| \neq 0$.

En cuanto a las diferencias entre los dos primeros, obviamente triangular una matriz requiere de muchas menos operaciones que diagonalizarla. Pero G.J. ofrece la solución del sistema, cuando existe, explícitamente y también provee, cuando existe, la inversa de A. Ambos métodos proveen el determinante de A cuando es cuadrada (los detalles se brindan en el Apéndice).

A continuación mostraremos el aspecto que adquiere la matriz A tras la aplicación de G.J., en todos los casos posibles de sistemas de ecuaciones lineales.

**2.1.- m > n**

**2.1.1.-** Las n columnas de A son linealmente independientes, es decir, r = n. En este caso, la aplicación de G.J. a la matriz A arroja el siguiente resultado (supondremos, sin pérdida de generalidad, que las filas nulas se producen en la parte inferior y las columnas nulas a la derecha):

$$
\begin{array}{cc}
 & n \\
 & 1\ 0\ 0 \ldots . 0 \\
 & 0\ 1\ 0 \ldots . 0 \\
n & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & 0\ 0\ 0 \ldots . 1 \\
 & 0 \ldots\ldots . 0 \\
m\text{-}n & \ldots\ldots\ldots \\
 & 0 \ldots\ldots . 0
\end{array}
$$

**Ejemplo 1**.- Sea A

$$
\begin{array}{rrr}
1 & 0 & -2 \\
-1 & 2 & 1 \\
5 & -1 & 3 \\
4 & -4 & 5
\end{array}
$$

La aplicación de G.J. pivoteando sobre la diagonal es:

$$
\begin{array}{rrr}
\boxed{1} & 0 & -2 \\
-1 & 2 & 1 \\
5 & -1 & 3 \\
4 & -4 & 5
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rrr}
1 & 0 & -2 \\
0 & \boxed{2} & -1 \\
0 & -1 & 13 \\
0 & -4 & -13
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rrr}
1 & 0 & -2 \\
0 & 1 & -1/2 \\
0 & 0 & \boxed{25/2} \\
0 & 0 & 11
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{ccc}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0
\end{array}
$$

**2.1.1.1.-** B pertenece al subespacio de dimensión n generado por las columnas de A.

Al ser éstas linealmente independientes, existe una única manera de expresar a B como combinación lineal de ellas.

Por lo tanto, el sistema es *compatible determinado*.

r' = r = n

**Ejemplo 2**.- Sea A como en el Ej. 1 y B:

$$
B = \begin{pmatrix} -1/15 \\ 13/15 \\ 53/30 \\ 1/3 \end{pmatrix}
$$

La aplicación de las mismas transformaciones anteriores, pero ahora sobre la matriz ampliada A|B, da por resultado

$$
\left.\begin{array}{rrr|r}
\boxed{1} & 0 & -2 & -1/15 \\
-1 & 2 & 1 & 13/15 \\
5 & -1 & 3 & 53/30 \\
4 & -4 & 5 & 1/3
\end{array}\right.
\Rightarrow
\left.\begin{array}{rrr|r}
1 & 0 & -2 & -1/15 \\
0 & \boxed{2} & -1 & 4/5 \\
0 & -1 & 13 & 21/10 \\
0 & -4 & -13 & 3/5
\end{array}\right.
\Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow
\left.\begin{array}{rrr|r}
1 & 0 & -2 & -1/15 \\
0 & 1 & -1/2 & 2/5 \\
0 & 0 & \boxed{25/2} & 5/2 \\
0 & 0 & 11 & 11/5
\end{array}\right.
\Rightarrow
\left.\begin{array}{rrr|r}
1 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & 1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.
$$

De la última tabla surge explícitamente:

a) la (única) solución del sistema es $x_1 = 1/3$; $x_2 = 1/2$: $x_3 = 1/5$ (*)

b) r = r' = 3.

**2.1.1.2.-** B no pertenece al subespacio de dimensión n generado por las columnas de A.

--------------------------

(*) De acuerdo con (3), esto es equivalente a decir que

1/3 ; 1/2 ; 1/5 ,

son las coordenadas de B en la base formada por las columnas de A.

En este caso, la expresión ( 3 ) no es posible o, lo que es lo mismo, el sistema es *incompatible*; r' = n + 1

**Ejemplo 3**.- Si modficamos el $b_4$ del ejemplo anterior dejando los de más $b_i$ inalterados (por ejemplo $b_4' = 7/3$), B' ya no pertenecerá al subespacio generado por las columnas de A. Las transformaciones que sufre este sistema al aplicar las mismas operaciones de pivoteo según G.J., son idénticas a las del ejemplo anterior excepto en el elemento $b_4$, quedando como matriz final, la siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

De esta matriz transformada, resulta claramente lo que a través de Rouche-Frobenius es oscuro:

a) r = 3 ; r' = 4

b) el sistema es *incompatible*: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2$

**2.1.2.-** Las columnas de A son linealmente *dependientes*, por lo tanto, el subespacio generado por ellas será de dimensión r < n. Entonces, un vector arbitrario B, o bien no puede expresarse como combinación lineal de las columnas de A (no pertenece al subespacio que ellas generan), o bien se puede expresar de infinitas maneras (por no constituir una base dichas columnas): el sistema será o bien *incompatible* o bien *compatible indeterminado*. El resultado de aplicar G.J. arroja una matriz de la forma:

$$\begin{array}{c|c|c} & r & n-r \\ \hline & 1\ 0 \ldots 0 & x \ldots x \\ & 0\ 1 \ldots 0 & x \ldots x \\ r & \ldots\ \ . & x \ldots x \\ & 0\ \ 0\ \ldots 1 & x \ldots x \\ & 0 \ldots\ \ 0 & 0 \ldots 0 \\ n-r & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ & 0 \ldots\ \ 0 & 0 \ldots 0 \\ & 0 \ldots\ \ 0 & 0 \ldots 0 \\ m-n & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ & 0 \ldots\ \ 0 & 0 \ldots 0 \end{array}$$

**Ejemplo 4**.- Tomamos las mismas dos primeras columnas de los ejemplos anteriores, pero como tercera ponemos una columna que pertenece al subespacio que generan aquéllas

$$\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 5 & -1 & -11 \\ 4 & -4 & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{2} & -8 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 16 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

**2.1.2.1.-** El vector B pertenece al subespacio de dimensión r generado por las columnas de A.
r = r' < n.
*Sistema compatible indeterminado.*

**Ejemplo 5.-** A la matriz anterior la ampliamos con un B que pertenece al subespacio de dimensión 2, generado por sus 3 columnas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -5 & 8 \\ 5 & -1 & -11 & 14 \\ 4 & -4 & 4 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De donde resulta evidente que las infinitas soluciones se obtienen dando un valor arbitrario a $x_3$ y despejando $x_1$ y $x_2$ . (Obviamente, si se hubiera pivoteado de otra manera, las variables dependientes serían otras).
$x_1 = 4 + 3x_3$
$x_2 = 6 + 4x_3$

**(*) Profesor en Laboratorio de Cálculo y Estadística en diversas Facultades de la Universidad de Morón**

Continuará en el próximo boletín

# Una aproximación didáctica a la determinación del óptimo bajo monopolio puro

Por el Dr. José Luis
Iparraguirre D´Elia (*)

***Por pedido expreso de nuestros lectores, tenemos el agrado de repetir en forma completa este trabajo, publicado por partes en los boletines Nºs: 5, 6 y 7***

***1 ) Introducción***

La enseñanza a través de un tratamiento matemático completo de la maximización del beneficio de un monopolista presenta dificultades aunque se trate del caso más sencillo de una planta, un solo producto, un solo mercado ( no discriminación ) y dos factores productivos de los cuales es tomador de precios. A pesar de que se establezcan formas funcionales sencillas, como una demanda lineal del producto que vende el monopolista y función de producción hiperbólica sin cambio tecnológico.

Los escollos se hallan en que se debe tratar con un sistema de ecuaciones cuadráticas y de mayor grado, incluso según las especificaciones funcionales adoptadas, lo cual generalmente excede el bagaje de conocimientos del alumnado hacia la etapa de la carrera en que aparece este contenido.

En este trabajo se presenta una determinación rigurosa de la solución del problema sin necesidad de recurrir al análisis matemático de funciones no lineales a partir de describir en etapas el razonamiento implícito en el análisis que realizaría el monopolista.

El método que se pone a consideración posee la ventaja de aunar el razonamiento en términos económicos con la formalización en ecuaciones y con la utilización de conceptos que los alumnos previamente han adquirido, tales como isocuantas, isocostos, curvas de demanda, maximización de funciones lineales de dos variables sujetas a una restricción, etc.

Si bien las expresiones parciales, así coma la expresión final del beneficio óptimo, son cuadráticas, en realidad están comprendidas íntegramente por coeficientes constantes y por valores previamente alcanzados por las variables intervinientes.

***2) El problema***

Vamos a suponer la existencia de un mercado monopólico que presenta una demanda lineal :

**P = A - b .Q** **( 1 )**

Donde : P es el precio ; Q la cantidad ; A y b constantes positivas

Supongamos, además, que este monopolista tiene una función de producción de dos factores, capital y trabajo, que puede describirse así :

**Q = K . L** **( 2 )**

Donde K es el capital y L el trabajo.

Además, la función costos totales es ( despreciando los costos fijos ) :

**CT = r . K + w . L** **( 3 )**

Donde r es la tasa de interés y w el salario, los cuales están dados , es decir que el monopolista es un tomador de ambos precios.

Si el ingreso total es igual al precio por la cantidad, o sea :

**IT = P . Q** **( 4 )**

El beneficio total será :

**BT = IT - CT** **( 5 )**

El problema de optimización se podría expresar como la maximización de la función de beneficio (5), la cual tras los correspondientes reemplazos queda :

**max BT = ( A - b. K . L ). K. L - r . K - w . L** **( 6 )**

El primer término no es lineal, lo cual acarrea dificultades para presentar formalmente la resolución del problema, por cuanto se tendría

$$\begin{cases} dBT / dK = A . L - b . 2 . K . L^2 - r & (7) \\ dBT / dL = A. K - b . 2 . L . K^2 - w & (8) \end{cases}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones no lineal suele no estar comprendido en los cursos de matemática hasta el momento en que aparece este tópico en las asignaturas del área de economía.

No obstante ello, puede recurrirse a un procedimiento por etapas de determinación del punto óptimo, el cual tiene la ventaja adicional de seguir más de cerca el razonamiento que realizaría el empresario monopolista.

***3 ) El procedimiento por etapas***

En primer lugar el empresario debe definir qué dotación de cada factor utilizará dada su restricción de costos : presupuesto total , costo salarial y de capital. (ecuación 3 )

Para ello se recurre al conocido resultado de igualación de la recta de isocostos ( 3 ) con la curva isocuanta más elevada que surge de la función de producción.( ecuación 2 )

La combinación óptima de cada factor es aquella en la cual la recta de isocostos es tangente a la curva isocuanta.

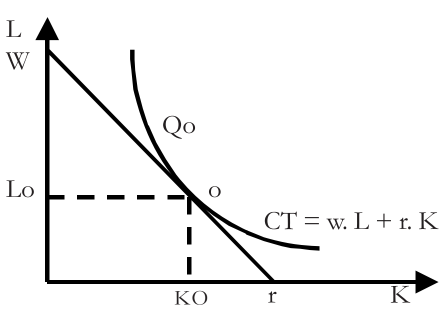



Gráfico 1

El monopolista elegirá la combinación Lo - Ko con la cual podrá producir la cantidad Qo , máxima alcanzable dada la restricción de costos de la ecuación 3.

Podemos expresar analíticamente este punto, a partir de un problema de máximo condicionado de ecuaciones lineales de dos variables.

Sea la familia de isocuantas ( en el plano L , K)

$$Q = K . L \qquad ( 2 )$$

Sujeta a la ecuación de costos

$$CT = r . K + w . L \qquad ( 3 )$$

La maximización requiere en primer lugar construir el Lagrangiano :

$$H = K . L + \lambda ( r . K + w . L - CT ) \qquad ( 9 )$$

Se obtienen las derivadas parciales primeras con respecto a K y con respecto a L , igualándolas a cero.

$$\begin{cases} dH/dK=L+ \lambda .r = 0 & ( 10 ) \\ dH/dL=K+ \lambda . w= 0 & ( 11 ) \end{cases}$$

La resolución del sistema de ecuaciones da como resultado que el ratio óptimo de capital y trabajo debe ser igual a la proporción de salario e interés.

$$\frac{Ko}{Lo} = \frac{w}{r} \qquad ( 12 )$$

Hasta aquí el monopolista sabe que debe elegir la cantidad Ko de capital y la dotación Lo de mano de obra tal que, la proporción Ko/Lo sea igual al precio relativo de ambos factores (w/r), siendo w,r los datos.

Por supuesto, este resultado no es otro que la igualdad de la productividad marginal de cada factor dividida por su costo.

En términos generales :

$$\frac{Pmg\ L}{r} = \frac{Pmg\ K}{w} \qquad ( 12' )\ (*)$$

La relación anterior puede expresarse en función de cada uno de los factores

$$Ko = ( w / r ) . Lo \qquad ( 13 )$$

$$Lo = (r / w ) . Ko \qquad ( 13' )$$

Con los resultados anteriores, de la función de costos se desprende que :

$$CT = 2. w. Lo \qquad ( 14 )$$

O, de manera equivalente, en términos de la dotación óptima de capital ,

$$CT = 2. r. Ko \qquad ( 14' )$$

Es decir que en términos de costo total, la cantidad de factores óptima es :

$$Lo = \frac{CT}{2w} \quad ( 15 ) \quad y \quad Ko = \frac{CT}{2r} \quad (15')$$

Estas expresiones de dotación de cada fac-

**( * ) ver apéndice**

tor, óptima desde el punto de vista asignativo son aplicadas en la función de producción ( 2 ) a los efectos de conocer cuál es la cantidad de producto denotada por la isocuanta Qo del gráfico 1.

**Qo = Ko . Lo**

$$Qo = \frac{CT}{2\,r} \cdot \frac{CT}{2\,w}$$

$$Qo = \frac{CT^2}{4.r.w} \qquad (16)$$

Dado que se deben producir Qo unidades de producto, valor conocido pues en la expresión ( 16 ) ya no hay incógnitas, se puede reemplazar esta expresión en la función de demanda ( 1 ), para calcular cuál es el precio que debe fijar el monopolista para maximizar su beneficio.

Se obtiene :

$$Po = A - b\,\frac{CT^2}{4.r.w} \qquad (17)$$

Conocidos el precio óptimo y la cantidad óptima, se calcula el ingreso total correspondiente, reemplazando las expresiones ( 16 ) y ( 17 ) en la ecuación ( 4 ) :

$$ITo = \left( A - b\,\frac{CT^2}{4.r.w} \right) . \frac{CT^2}{4.r.w} \qquad (18)$$

Ahora ya se conoce el valor del ingreso total y del costo total correspondientes a la combinación óptima de factores. Por ende, puede calcularse a cuánto asciende el beneficio total óptimo del monopolista, reemplazando las expresiones ( 17 ) y ( 3 ) – esta última para L = Lo , y , K = Ko – en la ecuación ( 5 ):

$$BTo = \left( A - b\,\frac{CT^2}{4.r.w} \right) . \frac{CT^2}{4.r.w} - CTo$$

$$BTo = \left[ A - b\,\frac{(w.Lo + r.Ko)^2}{4.r.w} \right] . \frac{(w.Lo + r.Ko)^2}{4.r.w} - (w.Lo + r.Ko) \qquad (19)$$

Y este es el valor de beneficio total que se quería obtener : el máximo alcanzable por este monopolista, dados todos los parámetros y constantes estructurales del problema: el costo de cada factor, el presupuesto total asignado a la producción, la función de producción y la demanda del producto que vende.

Además, la expresión de beneficio total está expresada en función de ambos factores de producción, lo cual la constituye en base de estudios acerca de regulación óptima, incidencia impositiva, etc.

### *4. Ejemplo numérico*

Sean las siguientes, las funciones de demanda y de costos que enfrenta un monopolista:

Función de demanda :

**P = A – b.Q = 15 – 0,25 Q**

Función de costos :

**CT = w. L + r. K = 5. L + 10 . K = 100**

La cantidad óptima a producir según la expresión ( 16 ) , asciende a :

$$Qo = \frac{CT^2}{4.r.w} = \frac{100^2}{4.10.5} = 50$$

Para poder colocar esta cantidad en el mercado, el monopolista debe fijar un precio que viene determinado por la función demanda:

**P = 15 – 0,25.Q**

**Po = 15 – 0,25 . 50 = 2,5**

Con el dato del precio y la cantidad óptimos, el ingreso total correspondiente puede calcularse a partir de la expresión ( 4 ):

**ITo = Po . Qo = 2,5 . 50 = 125**

Dado este valor de ingreso total, y el dato de que el costo CT es igual a 100, el beneficio total máximo surge por diferencia:

**BT máx. = ITo - CT**
**BT máx. = 125 – 100 = 25**

### *5.- Apéndice*

Resulta fácil demostrar que la no linealidad no ocurre bajo condiciones de competencia perfecta, pues en este caso el precio de venta no está en función de la cantidad producida, sino que es constante e igual al precio de equilibrio del mercado ( la demanda dirigida a una firma bajo competencia perfecta es infinitamente elástica).

Recordemos que bajo monopolio, el monopolista se enfrenta a la demanda de mercado, con lo cual según la ley de la demanda, se desea aumentar la cantidad vendida, deberá reducir el precio de venta del producto.

Así , en términos generales , la función de demanda en monopolio es:

$$P = P(Q)$$

O, lo que es lo mismo:

$$P = P\,[\,F(K,L)\,]$$

Esto introduce la no linealidad , pues el ingreso total viene dado por:

**$IT = P.Q$**

Es decir que puede expresarse en términos de los factores de la producción

**$IT = P\,[F(K.L)]\,.\,(K.L)$**

Mientras que en competencia perfecta ,la demanda se expresa por:

**$P = P^*$**

Tal que al precio P* se equilibre el mercado, es decir:

**$Qd(P^*) = Qs(P^*)$**

Donde Qd es la cantidad demandada en el mercado y Qs , la ofrecida.

Así, en competencia perfecta el ingreso total viene dado por:

**$IT = P:Q$**

**$IT = P^*.(K.L)$**

La expresión correspondiente del beneficio total en competencia perfecta es:

**$BT = P^*.K.L - r.K - w.L$**

La obtención del máximo beneficio bajo el régimen de competencia perfecta puede plantearse, entonces, como un problema de maximización de una función de dos variables.

**$\text{Max } BT = P^*.K.L - r.K - w.L$**

Se procederá a derivar con respecto de K, y de L y se igualará a cero como condición necesaria.

$$\begin{cases} \dfrac{dBT}{dr} = P^* L - r = 0 \\[2ex] \dfrac{dBT}{dL} = P^* K - w = 0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones lineales es de fácil resolución para los alumnos de la etapa de la carrera en que se introducen en esta temática.

Como sabemos, el resultados es:

**$L^{cp} = w / P^*$**

y

**$K^{cp} = r / P^*$**

Donde el súper índice cp denota que son la dotación de trabajo y capital que optimizan la asignación de factores.

Es decir que se obtienen las condiciones de optimización habituales de igualación del producto marginal de un factor a su precio.

Tengamos en cuenta al respecto que, dada la función de producción elegida, el producto marginal físico de un factor es igual al otro factor.

En términos matemáticos:

$$\frac{dQ}{dK} = L \quad \text{(producto marginal físico del capital)}$$

$$\frac{dQ}{dL} = K \quad \text{(producto marginal físico del trabajo)}$$

No obstante que se halla al alcance del alumnado la determinación del resultado óptimo bajo competencia perfecta a partir de plantear la maximización del beneficio total, encuentro que posee utilidad didáctica la aplicación del mecanismo por etapas, descripto mas arriba ,también al caso de competencia perfecta, por cuento vincula los aspectos matemáticos con el razonamiento económico, de manera similar al descripto bajo monopolio, excepto, claro está, en lo que se refiere a la demanda dirigida a la firma.

**(*)Sub director de la carrera de Licenciado en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Morón.**

Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada
Investigaciones en curso.

# Gestión financiera de la empresa

**Director**
**Dr. Roberto Dominguez**

**Abstract:**
Desarrollo de un estudio compilado de la gestión financiera en la empresa, grande o mediana, a partir de:
a) el contexto amplio en el cual se desenvuelve el sistema financiero argentino;
b) el escenario conceptual para la comprensión de la gestión financiera y de procesos y datos subyacentes, en las técnicas de análisis financiero;
c) las herramientas de análisis financiero fundamentales para obtener respuestas significativas (*ratios*, punto de equilibrio, leverage) ;
d) el planeamiento científico de la actividad (presupuestos y evaluación de proyectos de inversión) ;
e) la determinación del costo de capital, clave para fijar objetivos;
f) la administración racional del capital de trabajo, generadora de la rentabilidad;
g) la estructura de financiamiento e inversión del negocio;
h) instrumentos de pago del comercio internacional

# Derivados financieros (futuros y opciones)

**Director**
**Dr. Enrique Burcet**

**Abstract**
Se explicará la forma en que operan los pisos de futuros y opciones, los agentes que intervienen, las características de los contratos, los tipos de órdenes, etc.
Se expondrán la forma de operaciones de coberturas, mostrando ejemplos prácticos.
Se estudiarán los mercados de divisa, tasas de interés a corto plazo, largo plazo, e índices accionarios, etc., presentando las características de los principales contratos y la forma en que se efectúan las coberturas.
Se estudiarán los mercados de opciones sobre futuros abarcando su concepto, tipo de opciones, explicación de las variables, cálculo del precio por medio de la fórmula de Black Scholes y sus principales estrategias. Análisis de la bibliografía.

# La eficiencia de Pareto en la programación Meta

**Director: Ing. Luinor E. Vilches**

**Abstract.**

La programación meta introducida por Charnes y Cooper, es un método multiobjetivo que permite solucionar problemas económicos reales, en los que corrientemente se presentan varios objetivos simultáneos y conflictivos entre sí. Los tipos de problemas que pueden resolverse con ese método son muy variados y aun de índole muy compleja..

No obstante, surgió la objeción de que en ciertos casos, en los que existen soluciones alternativas, el mencionado método no asegura una solución Pareto óptima y puede dar una solución dominada, es decir , que existe una mejor solución que la dada.

Para solucionar el problema planteado se desarrollaron métodos interactivos, como el de Hwang y Masud, y test de verificación y corrección de soluciones, como el de Hannan y el de Carlos Romero.

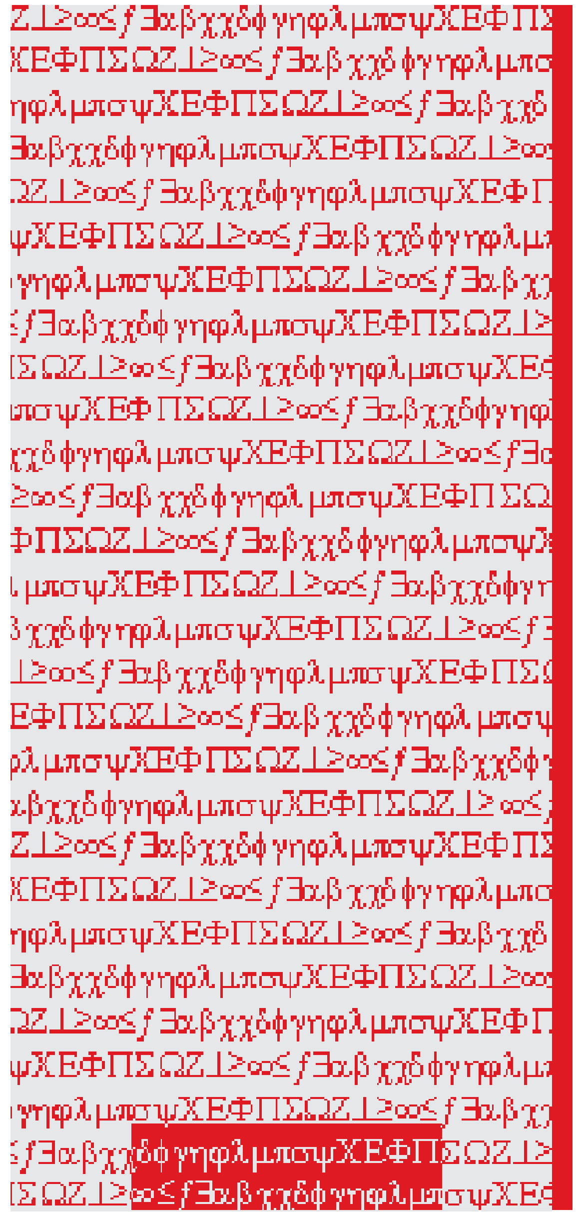
También están en etapa de desarrollo programas específicos de computación, como el GPSYS , del Mathematical Programming Group de la Universidad de Portsmouth, de Gran Bretaña.

La verificación y corrección mencionadas son importantes porque ratifican la vigencia del método de programación meta, de aplicación más sencilla que los demás métodos de decisión multicriterio que se han desarrollado y de resultados más confiables en la soluciónn de problemas complejos, que es donde los demás métodos flaquean.

## Indice



**Las opiniones vertidas en los trabajos que se publican son de exclusiva responsabilidad de sus autores**



**Staff**

**Director**
Ing. S.D. Soldano

**Redacción**
Profesores de la Facultad de Ciencias
Económicas y Empresariales

**Producido por la Gerencia de Medios y
Comunicación - Universidad de Morón**

**Editor:**
Lic. Alejandro Ninin

**Diseño Grafico:**
D.G. Marcela Pralóng

**Impreso en los Talleres Gráficos
de la Universidad de Morón**

**Año 5 Número 8**

**Registro de la propiedad
intelectual SSN 0329-0255**

**Universidad de Morón**
Cabildo 134 (1708) Morón
(011) 4483-1023 (líneas rotativas)
Fax: 4627-8551
E-mail: webmaster@unimoron.edu.ar
Internet: www.unimoron.edu.ar

## Autoridades de la Universidad de Morón

**Rector**
*Dr. Mario Armando Mena*
**Vicerrector de Desarrollo y Control de Gestión**
*Dr. Jorge R. Lemos*
**Vicerrector de Posgrado y Extensión Universitaria**
*Lic. Olga B. Villalba*
**Vicerrector Académico y de Investigación**
*Ing. Enrique L. Otero*

**Facultades**

**Agronomía**
*Decano Ing. Agr. Jorge Raúl Ottone*
*Vicedecano Ing. Agr. Antonio Angrisani*
**Arquitectura, Diseño, Arte y Urbanismo**
*Decano Arq. Oscar Borrachia*
*Vicedecano Arq. Attila Barkats Von Willei*
**Ciencias Económicas y Empresariales**
*Decano Dr. Jorge Emilio Salvel*
*Vicedecano Dr. Miguel G. Skubic*
**Cs. Exactas, Químicas y Naturales**
*Decano Dr. Aquiles Ferranti*
*Vicedecano Dr. Marcelo Mignone*
**Derecho y Ciencias Sociales**
*Decano Dr. Norberto Porto Lemma*
*Vicedecano Dr. Alfredo del Carmen Córdoba*
**Ciencias Aplicadas al Estudio Sistemático del Turísmo y la Población**
*Decano Lic. Alejandro Gavric*
*Vicedecana Traductora Pública Graciela Redona*
**Filosofía, Ciencias de la Educación y Humanidades**
Decano Lic. Roberto Paterno
Vicedecana Prof. Ada Perez Wright
**Informática, Cs. de la Comunicación y Técnicas Especiales**
*Decano Ing. Hugo Padovani*
*Vicedecana Lic. Sonia Zugna de Jausoro*
**Ingeniería**
*Decano Ing. Oscar Nuñez*
*Vicedecana Ing. Elisa Mestorino Bachofen*
**Medicina**
Decano Dr. Domingo Liotta

## Autoridades de la Fundación Universidad de Morón

**Presidente**
Dr. Mario Armando Mena
**Vicepresidente**
Sr. Ricardo Lirussi
**Tesorero**
Dr. Jorge Raúl Lemos
**Secretario**
Ing. Oscar Nuñez

UM