

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES DE MATEMÁTICA APLICADA

Boletín Matemático Nro. 15 – Año 10

Abril 2008

---

**Decano: Dr. Jorge Raúl Lemos****Director del Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada: Ing. Luinor Edelfio Vilches****Contactos:** econinvestiga@unimoron.edu.arlvilches@unimoron.edu.ar

---

**Índice:**

- **Acerca de un uso reciente de la distribución de Laplace en Economía** **Pág. 1**  
Autor: Dr. José Luis Iparraguirre D'Elía
- **La importancia de la Matemática Aplicada: Programación Lineal** **Pág. 8**  
Autores: Ing. Martín O. Adler y Lic. Erica V. Adler
- **Significado económico de las variables duales del problema de transporte** **Pág. 15**  
Autor: Comp. Cient. Santiago Ferrari
- **Problemas históricos en la enseñanza de la probabilidad** **Pág. 20**  
Autores: Profesores: Andrea Lavalle y Lisandro Curia

**Artículos:****Acerca de un uso reciente de la distribución de Laplace en Economía**

José Luis Iparraguirre D'Elía (\*)

(\*) Senior Research Economist, Economic Research Institute of Northern Ireland, Belfast, Irlanda del Norte, Reino Unido. Investigador de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Morón. E-mail: jose@erini.ac.uk

Introducción

Diversos trabajos recientes (Stanley et al., 1995 y 1996; Amaral et al., 1997a y b y 2001; Ramsden y Kiss-Haypál, 2000; Botazzi y Secchi, 2002 y 2003; Botazzi et al., 2005; Coad, 2006 y 2007; Reichstein y Jensen, 2005; etc.) han hallado que la distribución del tamaño y de las tasas de crecimiento de las empresas en distintos países y de distintos sectores sigue una forma triangular similar a una tienda de campaña o carpa.

---

A partir de este hallazgo, los autores recomiendan ajustar los datos a una función de distribución simétrica de Laplace.

Este artículo repasa las principales características de la función de distribución de probabilidades de Laplace, los hallazgos empíricos recientes en materia de distribución de tasas de crecimiento de empresas y algunas de las hipótesis esgrimidas para dar cuenta de este hecho estilizado.

### 1. La distribución de probabilidades simétrica de Laplace

La distribución de Laplace es una función de probabilidad continua, también conocida como exponencial doble, cuya función de densidad responde a la siguiente forma funcional:

$$f(x|\mu, b) = \left(\frac{1}{2b}\right) e^{\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)},$$

la cual adopta los siguientes valores:

$$= \frac{1}{2b} \begin{cases} e^{\left(-\frac{\mu-x}{b}\right)} & \text{si } x < \mu \\ e^{\left(-\frac{x-\mu}{b}\right)} & \text{si } x \geq \mu \end{cases}$$

En las expresiones anteriores,  $x$  es una variable aleatoria;  $\mu$  es un parámetro de ubicación o localización de la distribución; y  $b$  ( $> 0$ ) es un parámetro de escala.

La media aritmética, mediana y modo de la función de Laplace es igual a  $\mu$ , y la varianza es igual a  $2b^2$ .

La función de distribución acumulada surge de integrar la anterior función, es decir,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \begin{cases} 0.5 e^{\left(-\frac{\mu-x}{b}\right)} & \text{si } x < \mu \\ 1 - 0.5 e^{\left(-\frac{x-\mu}{b}\right)} & \text{si } x \geq \mu \end{cases} = 0.5 \left[ 1 + \text{signo}(x - \mu) \left(1 - e^{\left(-\frac{\mu-x}{b}\right)}\right) \right]$$

Los gráficos 1a y 1b presentan funciones de densidad y acumuladas para diversos valores de los parámetros de localización y de escala<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Los gráficos 1a y 1b fueron generados con el paquete VGAM del entorno R.

Gráfico 1a – Funciones de Densidad de Laplace

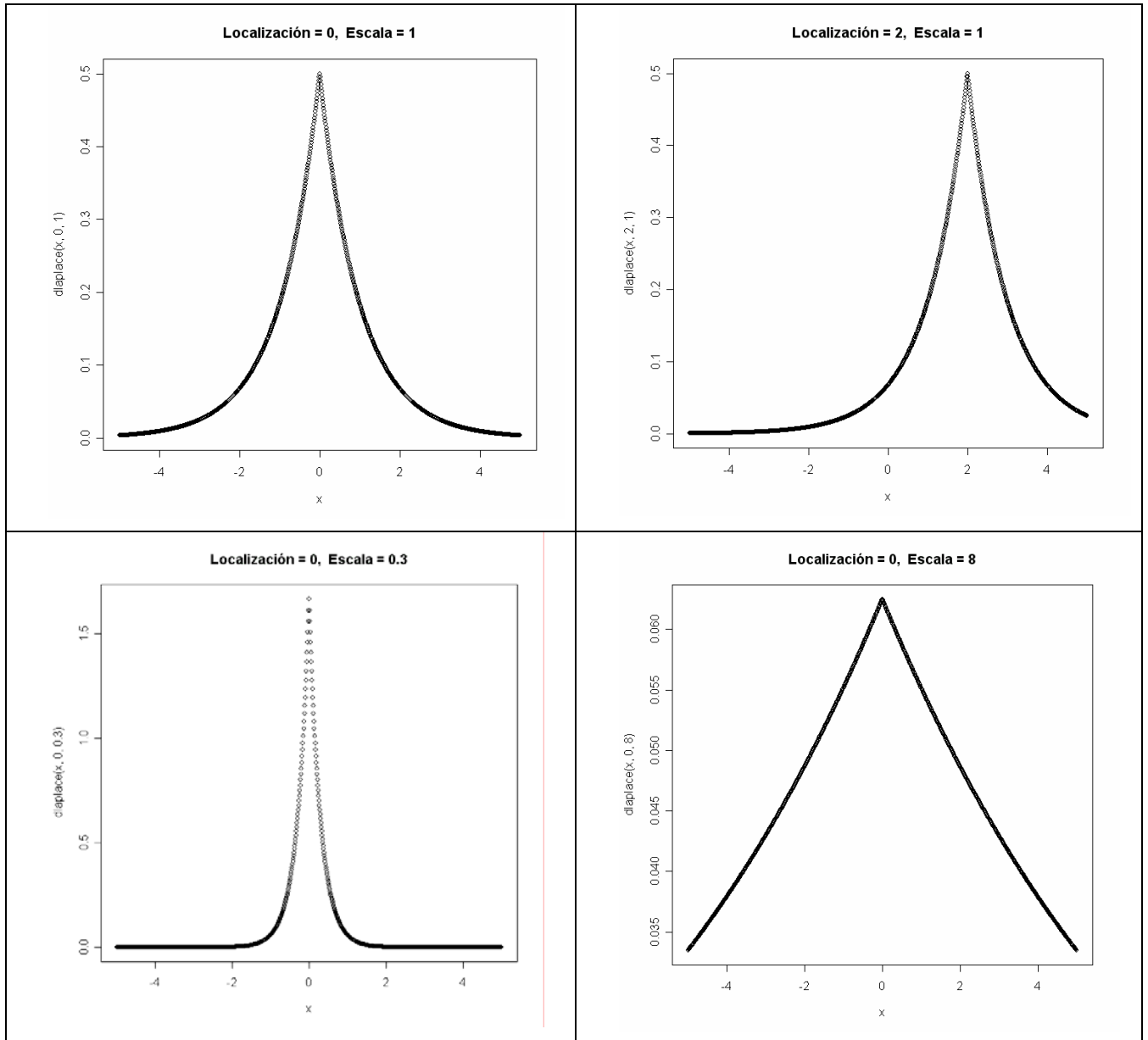
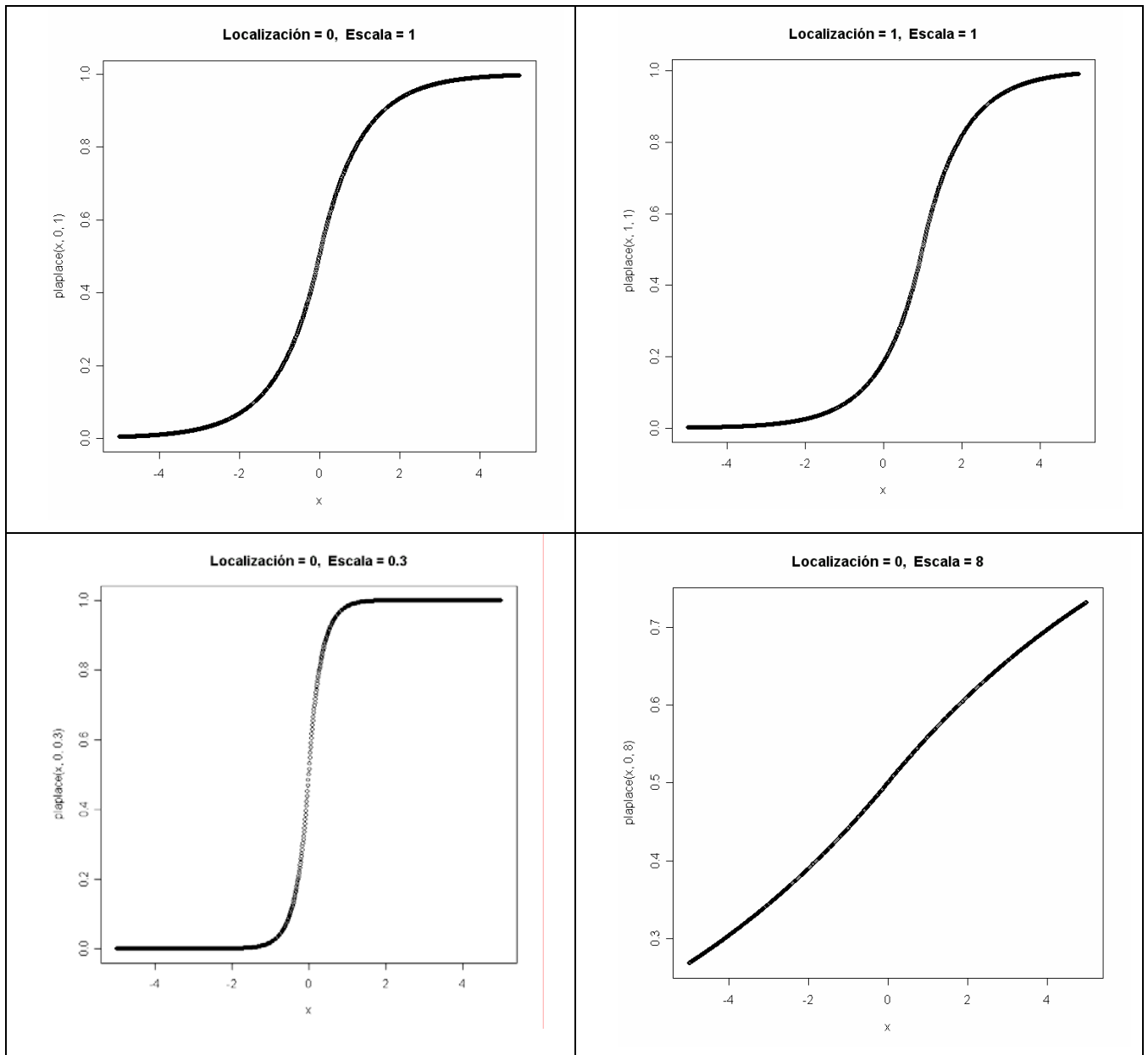


Gráfico 1b – Funciones Acumuladas de Laplace



Como podemos observar en el gráfico 1a, modificar el parámetro de localización desplaza la distribución a la derecha o izquierda sin afectar la forma de la distribución, mientras que modificar el parámetro de escala sí afecta su forma. En particular, cuanto más cercano a cero sea el parámetro de escala, más concentrada estará la función de densidad alrededor de la media y menos abultadas serán las colas. En cuanto a la

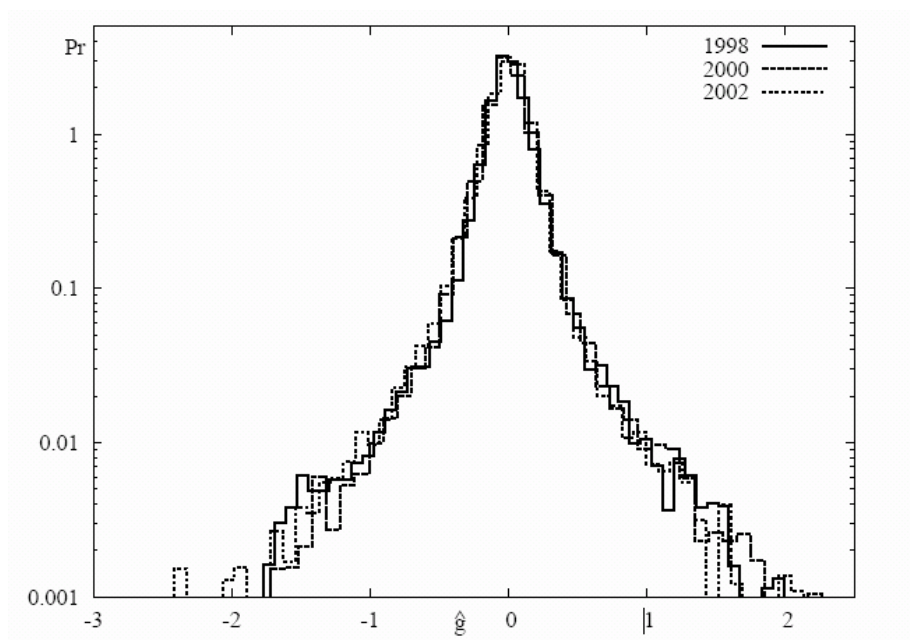
distribución acumulada, según el gráfico 1b, a mayor valor del parámetro de escala, la función pasa de una fuerte concentración en valores cercanos a cero para valores de la variable menores a cero, a valores cercanos a 1 para valores positivos de la variable, a una distribución uniforme, tendiente a lineal, de probabilidad acumulada. Para un análisis detallado de la distribución de Laplace, aunque las aplicaciones a la economía se reducen a los mercados financieros, ver el libro de Kotz, Kozubowski y Podgórski (2001).

## 2. Hallazgos empíricos en materia de distribución de tamaño y tasas de crecimiento de empresas

Los trabajos mencionados en la introducción han encontrado, para distintos países, períodos y sectores de actividad económica, un recurrente fenómeno estadístico: la distribución del tamaño y tasas de crecimiento de las firmas según el tamaño de las mismas sigue una distribución que puede ajustarse aceptablemente con una función de distribución de Laplace.

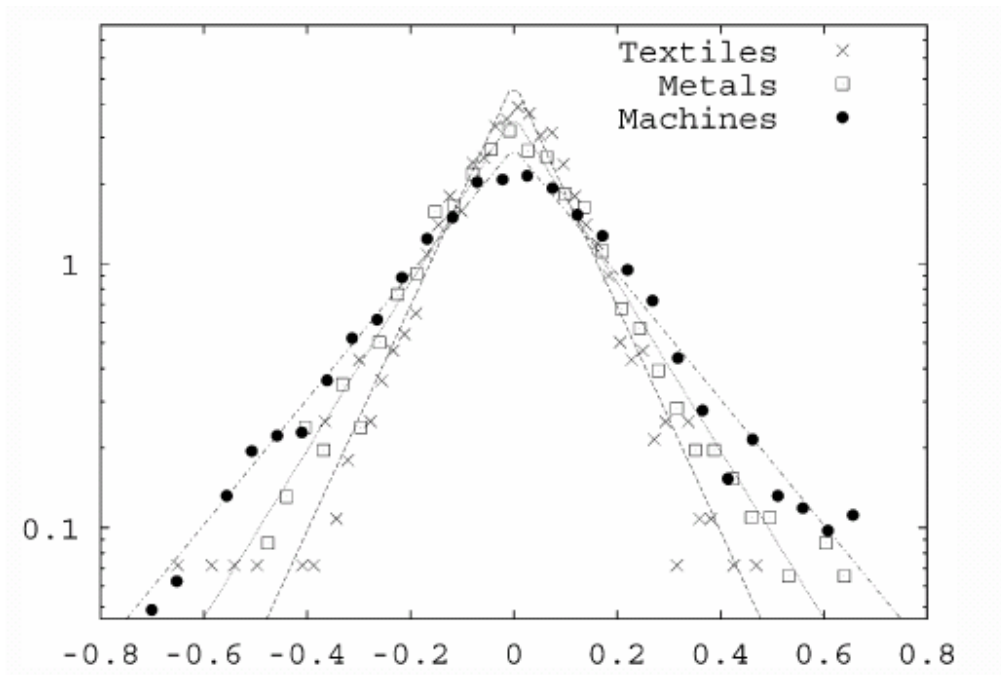
Por ejemplo, el gráfico 2a presenta la distribución de las tasas de crecimiento de las ventas de 10.000 firmas manufactureras en Francia en tres años diferentes, 1998, 2000 y 2002 mientras que el gráfico 2b muestra la distribución de las tasas de crecimiento de personal en firmas textiles, metalúrgicas y de fabricación de maquinaria en Italia entre 1989 y 1996. El gráfico 2c presenta la distribución del tamaño y de las tasas de crecimiento de empresas farmacéuticas en Dinamarca en 1995 y 1996. En todos los casos puede observarse la forma puntiaguda de la distribución, semejante a una tienda de campaña o carpa, con colas abultadas.

**Gráfico 2a – Distribución de tasas de crecimiento de ventas,  
Empresas Manufactureras, Francia 1998-2002**



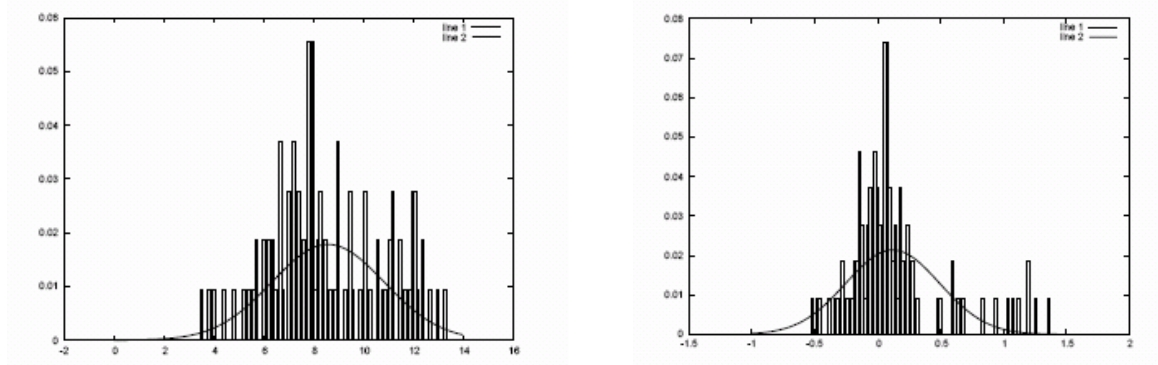
Fuente: Bottazzi et al., 2005, Fig. 4

**Gráfico 2b – Distribución de tasas de crecimiento de planta de personal  
Empresas Textiles, Metalúrgicas y de Maquinaria, Italia, 1989-1996**



Fuente: Botazzi y Secchi, 2003, Fig. 1

**Gráfico 2c – Distribución de Tamaño y Tasas de Crecimiento  
Empresas Farmacéuticas, Dinamarca, 1995-1996**



Fuente: Reichstein y Jensen (2005)

### 3. Hipótesis explicativas

Como es conocido, Gibrat (1931) en un estudio ya clásico supuso que si la distribución de las tasas de crecimiento de las firmas es independiente del tamaño de las mismas, entonces la distribución del tamaño de las firmas se aproximaría a una función log normal. Sin embargo, numerosos estudios posteriores hallaron que las distribuciones empíricas presentaban un sesgo hacia la derecha y eran leptocúrticas, con lo cual la función log normal esgrimida por Gibrat no se ajustaba a los datos.

La hipótesis con mayor aceptación en la literatura contemporánea que trata de explicar la forma que sigue la distribución de las tasas de crecimiento de las firmas fue formulada por Botazzi y Secchi (2005). Según estos autores, si suponemos que la probabilidad de una firma de obtener nuevas oportunidades de negocio depende de la cantidad de oportunidades de negocio ya obtenidas por la misma, podemos modelar un proceso de crecimiento industrial que sigue una función de Laplace. Este proceso dinámico de rendimientos crecientes puede ser el resultado de economías de escala, alcance o red, así como de acumulación de capital humano o conocimiento del interior de las empresas. Las firmas exitosas se constituyen en una fuerza de atracción de mayores oportunidades de crecimiento.

### 4. El caso de los países en desarrollo

Hernández-Pérez et al. (2006) recientemente han reportado que para países en desarrollo (el trabajo analiza los casos de 10 países incluyendo Argentina) la distribución del tamaño de las firmas presentaría valores paramétricos “marcadamente” diferentes de los países desarrollados.

Este punto, así como la hipótesis resumida en el acápite anterior, ameritan mayor investigación, a nivel desagregado por sector de actividad y región. Estimularla es uno de los objetivos del presente trabajo.

### Referencias

- AMARAL L., BULDYREV S.V., HAVLIN S., LESCHHORN H., MAASS F., SALINGER M.A., STANLEY H.E. and STANLEY M.H.R. (1997a). “Scaling Behavior in Economics: I. Empirical Results for Company Growth”, *Journal de Physique I*, Volume 7, pp. 621-633
- AMARAL L., BULDYREV S.V., HAVLIN S., MAASS F., SALINGER M.A., STANLEY H.E. and STANLEY M.H.R. (1997b). “Scaling behavior in economics: The problem of quantifying company growth”, *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, Volume 244, Issues 1-4, pp. 1-24.
- AMARAL L., GOPIKRISHNAN P., PLEROU V., STANLEY H.E. (2001). “A model for the growth dynamics of economic organizations”, *Physica A Statistical and Theoretical Physics*, Volumen 299, pp. 127-136.
- BOTAZZI G. y SECCHI A. (2002). “On the Laplace Distribution of Firm Growth Rates”. LEM Working Paper Series 2002/20. LEM Laboratory of Economics and Management. Sant’Anna School of Advanced Studies. Pisa. Italia.

- BOTAZZI G. y SECCHI A. (2003). "Why are distributions of firm growth rates tent-shaped?", *Economic Letters*, Volume 80, pp. 415-420.
- BOTTAZZI G., COAD A., JACOBY N. and SECCHI A. (2005). "Corporate Growth and Industrial Dynamics: Evidence from French Manufacturing". LEM Working Paper Series 2005/21. Sant'Anna School of Advanced Studies. Pisa, Italia.
- COAD A. (2006). "Towards an explanation of the exponential distribution of firm growth rates," *Cahiers de la Maison des Sciences Economiques 06025*, Université Panthéon- Sorbonne (Paris 1).
- COAD A. (2007). "Testing the principle of 'growth of the fitter': The relationship between profits and firm growth," *Structural Change and Economic Dynamics*, Volume 18(3), pp. 370-386.
- GIBRAT, R. (1931). *Les inégalités économiques*. Sirey: Paris, Francia.
- HERNÁNDEZ-PÉREZ R., ANGULO-BROWN F. y TUN D. (2006). "Company size distribution for developing countries", *Physica A*, Vol. 359, pp. 607–618.
- KOTZ S., PODGORSKI K. y KOZUBOWSKI T. (2001). *Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with New Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance*. Birkhauser Verlag: Basilea, Suiza.
- RAMSDEN, J. y KISS-HAYPÁL G. (2000). "Company size distribution in different countries", *Physica A*, Volume 277, pp. 220-227.
- REICHSTEIN T. y JENSEN M.B. (2005). "Firm size and firm growth rate distributions – The case of Denmark", *Industrial and Corporate Change*, Volume 14, pp. 1145-1166.
- STANLEY M. H. R., BULDYREV S. V., HAVLIN S., MANTEGNA R., SALINGER M. A. y STANLEY H. E. (1995). "Zipf plots and the size distribution of firms", *Economic Letters*, Volume 49, pp. 453-457.
- STANLEY M. H. R., NUNES AMARAL L. A., BULDYREV S. V., HAVLIN S., LESCHHORN, H., MAASS P., SALINGER M. A. y STANLEY H. E. (1996). "Scaling behaviour in the growth of companies", *Nature*, 379.

### La Importancia de la Matemática Aplicada: la Programación Lineal

Martín O. Adler (\*) y Erica V. Adler (\*\*)

(\*) Profesor Titular Consulto de Administración de la Producción y de Análisis Matemático I y II, y Director del Departamento Pedagógico de Matemática, en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Morón. (\*\*) Docente Autorizada en Administración de la Producción y Análisis Matemático I, en la misma Facultad.

En un Boletín Matemático anterior (Nº 13), se publicó un artículo en el que manifestábamos que para que una empresa sea exitosa debe estar en condiciones de convivir y avanzar en un mundo donde la estrategia es moneda corriente o cosa de todos los días, con las diferentes y complejas situaciones que se presentan. Nos referíamos a las exigencias que nos plantean los nuevos tiempos que vivimos y a la necesidad de conocer y aplicar las herramientas de la Investigación Operativa en el ámbito de las empresas.

Decíamos que quienes se desempeñan en la dirección o gestión empresarial, no siempre manejan o comprenden los métodos o modelos operativos; por lo que es fácil inferir que las respuestas adoptadas frente a los problemas de toma de decisiones no siempre provienen de un serio estudio, donde estas técnicas son de imprescindible intervención. El presente artículo desarrolla el método matemático de Programación Lineal, con el objeto de enfatizar sobre la Importancia de la Matemática Aplicada para la solución de problemas.

El método de Programación Lineal pertenece a la Investigación Operativa, Investigación Operacional o Técnicas Cuantitativas y, de la misma manera que otros métodos matemáticos, es muy utilizado en el campo de la Administración de la Producción, Logística y Operaciones. Por ejemplo, es habitualmente empleado para la selección de alternativas para encontrar el lugar en donde erigir una planta industrial o el ámbito de una empresa de servicios, pero su aplicación se aprecia en mayor grado en la determinación de la combinación óptima de productos. También es muy común utilizarlo en la industria de alimentos, en la cual se mezclan diferentes materias primas para obtener combinaciones alimenticias. En la industria manufacturera de transformación, permite determinar la manera de asignar los hombres, la materia prima y las máquinas con el objetivo de maximizar las utilidades o minimizar los costos.

Aquí aplicaremos el método a la selección de proyectos relacionados con la actividad agroindustrial, donde el problema se refiere a la selección de alternativas.

Para encarar el estudio elegimos dos proyectos que fueron seleccionados previamente de un conjunto. Es de señalar que la región elegida responde a las exigencias climáticas necesarias para llevar a cabo cualquiera de los dos proyectos; ya que ambas áreas imaginadas para los cultivos están radicadas en una región tropical, por lo que se eligieron los siguientes productos: café, cacao, banana y palmitos.

En el proyecto **A** se fijó como objetivo la plantación y cultivo de café en un 60% de la superficie disponible, y de cacao en el 40 % restante. En el proyecto **B** se estableció un 55 % del área para bananas y el 45 % restante para palmitos.

Para poder concretar los proyectos debe analizarse la disponibilidad que existe en la zona de los recursos necesarios, comprobándose que no hay dificultades al respecto. Entre los recursos que existen podemos mencionar: agua, energía eléctrica, mano de obra y capital. No existen fertilizantes ni plaguicidas. Pero la disponibilidad de los distintos recursos es tal que limita la posibilidad de desarrollar ambos proyectos simultáneamente; por lo tanto, se debe estudiar la manera y en qué proporción se van a destinar los existentes.

Cabe expresar que en el ejemplo a desarrollar, los valores establecidos con respecto a los diferentes factores no responden estrictamente a lo que corresponde a explotaciones de estas características; ya que el mismo fue realizado a los efectos de apreciar la utilización del método.

Con respecto a la mano de obra, tanto en uno como en otro proyecto la misma incluye todo lo relacionado con el análisis del suelo, la preparación del mismo, la siembra, la tumba de cafetos y árboles, la poda, la cosecha, la aplicación de herbicidas y funguicidas, la aplicación de abonos orgánicos y químicos, la selección de brotes, el control de malezas, el control fitosanitario, el deshoje, el deshoje y la desinfección.

En el siguiente cuadro, en la columna 1 se ubican los recursos a considerar, en la columna 2 se registran las disponibilidades existentes para cada uno de ellos, y en las columnas 3 y 4 están los datos correspondientes a cada uno de los dos proyectos, expresando lo que se requiere para una hectárea de tierra.

Recursos	Disponibilidades	Proyecto A	Proyecto B
Mano de Obra	200.000 horas-hombre	1,5	1
Agua	100.000 litros/segundo	0,80	1,20
Energía Eléctrica	2.000.000 kWh	20	15
Fertilizantes	60.000 toneladas	0,70	0,70
Plaguicidas	20.000 toneladas	0,30	0,10
Capital	3.000.000 U\$S	20	40
Beneficio U\$S/ha		235	300

Cuadro 1. Cuadro de Valores

Llamamos  $x_1$  y  $x_2$  a las incógnitas que corresponden a la cantidad de hectáreas a adjudicar para cada uno de los proyectos, con las que se pueden plantear las ecuaciones e inecuaciones que vinculan a ambos.

La inecuación para la **mano de obra** es la siguiente:

$$1,5 x_1 + 1 x_2 \leq 200.000 \text{ horas-hombre}$$

1,5 expresa la cantidad de horas-hombre necesaria para una hectárea del proyecto **A** y  $x_1$  la cantidad de hectáreas a asignar a ese proyecto; 1 y  $x_2$  representan los mismos conceptos para el proyecto **B**. La suma de ambos productos ( $1,5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$ ) debe ser inferior a la disponibilidad existente, que en nuestro caso es de **200.000 horas-hombre**.

De acuerdo con los datos del cuadro de valores, la inecuación para el **agua** es:

$$0,80 x_1 + 1,20 x_2 \leq 100.000 \text{ litros / segundo}$$

Para la **energía eléctrica** la inecuación es:

$$20 x_1 + 15 x_2 \leq 2.000.000 \text{ kWh}$$

La correspondiente a los **fertilizantes**:

$$0,70 x_1 + 0,70 x_2 \leq 60.000 \text{ toneladas}$$

Para los **plaguicidas**:

$$0,30 x_1 + 0,10 x_2 \leq 20.000 \text{ toneladas}$$

Con respecto al **capital**, la inecuación correspondiente es:

$$20 x_1 + 40 x_2 \leq 3.000.000 \text{ U$S}$$

Cada una de estas inecuaciones corresponde a la limitación o restricción que impone la disponibilidad de un recurso.

El objetivo a perseguir es el de maximizar el beneficio económico que se obtendrá de cada una de las hectáreas. A la función económica correspondiente se la conoce como **funcional** o **función objetivo**, representada por la siguiente ecuación:

$$Z = 235 x_1 + 300 x_2$$

La misma expresa que si una hectárea del proyecto **A** brinda un beneficio de U\$S 235, la cantidad  $x_1$  de hectáreas dará un beneficio de **U\$S 235.  $x_1$** , y que la cantidad  $x_2$  de hectáreas del proyecto **B** dará un beneficio de **U\$S 300.  $x_2$** . Se busca que la suma de ambos productos sea la máxima que se pueda obtener.

Ahora se procede a representar sobre un sistema de ejes coordenados cartesianos, a los que denominamos  $x_1$  el de abscisas y  $x_2$  el de ordenadas, los valores límite de las restricciones correspondientes a los diferentes recursos de ambos proyectos, que están sobre las rectas expresadas por igualdades en lugar de inecuaciones.

Si se asigna el valor cero a  $x_1$ ,  $x_2$  obtendrá el valor que surja de despejarla de la respectiva ecuación. Procediendo de la misma manera con la otra variable  $x_2$  y despejando, se obtendrá el valor que le corresponde a  $x_1$ . Vamos a realizar el análisis para todos los recursos, comenzando con la mano de obra.

Con respecto a la **mano de obra**:

$$1,5 x_1 + 1 x_2 = 200.000 \text{ horas-hombre}$$

$$\text{Si } x_1 = 0; \quad x_2 = 200.000$$

$$\text{Si } x_2 = 0; \quad x_1 = 133.333$$

Con respecto al **agua**:

$$0,80 x_1 + 1,20 x_2 = 100.000 \text{ litros/segundo}$$

$$\text{Si } x_1 = 0; \quad x_2 = 83.333$$

$$\text{Si } x_2 = 0; \quad x_1 = 125.000$$

La ecuación de la **energía eléctrica** es:

$$20 x_1 + 15 x_2 = 2.000.000 \text{ kWh}$$

$$\text{Si } x_1 = 0; \quad x_2 = 133.333$$

$$\text{Si } x_2 = 0; \quad x_1 = 100.000$$

Para los **fertilizantes**:

$$0,70 x_1 + 0,70 x_2 = 60.000 \text{ toneladas}$$

$$\text{Si } x_1 = 0; \quad x_2 = 85.714$$

$$\text{Si } x_2 = 0; \quad x_1 = 85.714$$

La ecuación para los **plaguicidas** es:

$$0,30 x_1 + 0,10 x_2 = 20.000 \text{ toneladas}$$

$$\text{Si } x_1 = 0; \quad x_2 = 200.000$$

$$\text{Si } x_2 = 0; \quad x_1 = 66.666$$

Para el **capital**:

$$20 x_1 + 40 x_2 = 3.000.000 \text{ U$S}$$

$$\text{Si } x_1 = 0; \quad x_2 = 75.000$$

$$\text{Si } x_2 = 0; \quad x_1 = 150.000$$

Hay dos restricciones más a tener en cuenta:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

De acuerdo con lo explicado, se procede ahora a representar gráficamente en cada uno de los ejes los valores obtenidos de  $x_1$  y  $x_2$  para cada uno de los recursos (Gráfico 2). Cabe expresar que la representación gráfica correspondiente a las distintas variables es posible, debido a que estamos refiriendo todos los datos a una hectárea; pues si no, sería imposible por razones de heterogeneidad.

Como todas las inecuaciones son de menor o igual, los puntos que representan soluciones de cada una de ellas están ubicados entre la recta representativa de los valores máximos y los ejes coordenados. El espacio común o polígono de las soluciones, llamado región de factibilidad, es el comprendido por la poligonal OABCD. Dentro de este espacio existen puntos que determinan pares de valores  $x_1$ ,  $x_2$  que son soluciones del problema, pero ninguna de esas soluciones es la óptima, ya que hay una sola, que se encuentra ubicada en uno de los vértices del polígono. Para encontrar las coordenadas de ese punto, o sea la solución óptima del problema, puede procederse gráfica o analíticamente, resolviendo un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Si el estudio se realiza de manera analítica, para determinar el beneficio óptimo debemos analizar las coordenadas ( $x_1$ ,  $x_2$ ) de todos los vértices del polígono OABCD y reemplazar cada par de valores en la función objetivo Z.

En primer lugar, se deberán obtener esos pares de coordenadas, para lo cual se resuelve el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando alguno de los métodos tales como sustitución, igualación, reducción o determinantes.

Punto O (0 ; 0):  $Z_0 = 235 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0$

Punto A (0 ; 75000)  $Z_A = 235 \cdot 0 + 300 \cdot 75000 = 22.500.000$

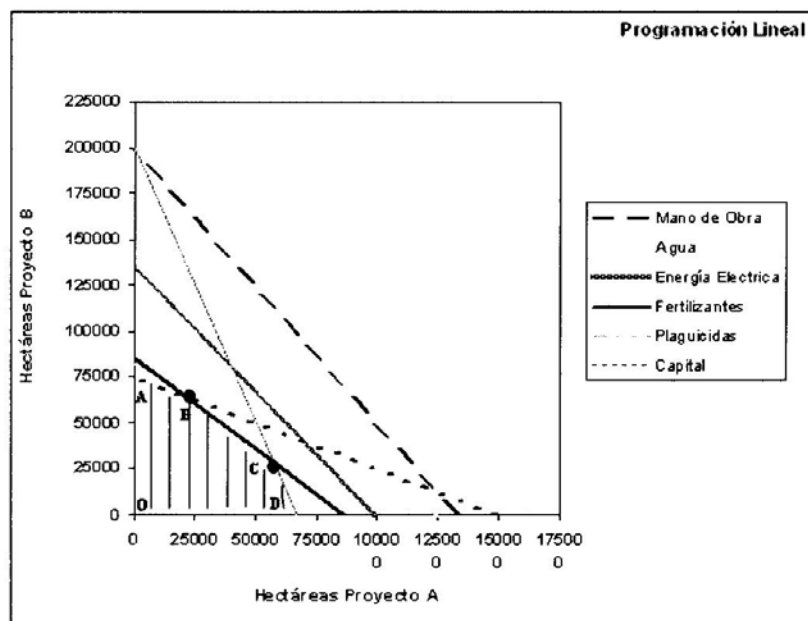


Gráfico 2. Programación Lineal

**Punto B**

Para encontrar las coordenadas del punto **B** debemos determinar el punto de intersección entre la recta que representa los valores máximos de la inecuación de **fertilizantes** y la recta que representa los valores máximos de la inecuación del **capital**.

Como se mencionó anteriormente, se puede utilizar cualquiera de los métodos antes citados. En el siguiente ejemplo se resolvieron a través del método de igualación.

**De la inecuación fertilizantes:  $0,70 x_1 + 0,70 x_2 = 60.000$  toneladas**

**De la inecuación capital:  $20 x_1 + 40 x_2 = 3.000.000$  U\$S**

Despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones:

**Fertilizantes:**

$$x_1 = -x_2 + \frac{60000}{0,70}$$

**Capital:**

$$x_1 = -\frac{40}{20}x_2 + \frac{3000000}{20}$$

Igualamos ambas ecuaciones:

$$-x_2 + \frac{60000}{0,70} = -2x_2 + 150000$$

Despejamos el valor  $x_2$ ; resultando  $x_2 = 64285$

Reemplazamos  $x_2$  por este valor en cualquiera de las ecuaciones despejadas en los pasos anteriores para obtener el valor de  $x_1$ . Por ejemplo, de la ecuación capital:

$$: x_1 = -2.(64285) + 150000 = 21430$$

Luego, para el Punto B (21430; 64285):  $Z_B = 235. 21430 + 300. 64285 = 24.321.550$

**Punto C:**

Éste es el punto de intersección de las rectas que representan los valores máximos de las inecuaciones de **fertilizantes** y de **plaguicidas**. Procedemos en forma similar al caso del punto B:

**De la inecuación fertilizantes:  $x_1 = -x_2 + 60000/0,7$**

**De la inecuación plaguicidas:  $x_1 = -0,10/0,30 \cdot x_2 + 20000/0,30$**

Igualandando ambas expresiones:  **$-x_2 + 60000/0,7 = -x_2/3 + 20000/0,30$**

De donde:  **$x_2 = 28.571$**

Reemplazando en una ecuación de  $x_1$ :  **$x_1 = -x_2/3 + 20000/0,3 = 57.143$**

Luego, para el **Punto C(57143 ; 28571)**

$$Z_C = 235 \cdot 57143 + 300 \cdot 28571 = 21.999.905$$

**Punto D (66666 ; 0)**

$$Z_D = 235 \cdot 66666 + 300 \cdot 0 = 15.666.510$$

Encontramos que las coordenadas del punto **B** son las que maximizan la función objetivo, que resulta igual a **U\$S 24.321.550**.

Los puntos que se encuentran ubicados fuera del polígono no son soluciones del problema, pues pueden cumplir con las restricciones de uno de los factores, pero no de todos.

Para la resolución gráfica se debe representar el **funcional Z**. Para ello, despejamos la variable  $x_2$  de la función objetivo **Z** para el punto **O(0,0)**, que vale 0:

$$Z_0 = 235 x_1 + 300 x_2 = 0$$

$$x_2 = -\frac{47}{60} x_1$$

Se agrega la representación de esta función al gráfico anterior (Gráfico 3). Por poseer pendiente negativa su ángulo es mayor de  $90^\circ$ . La recta tendrá siempre la misma pendiente o inclinación aunque se cambie el valor de **Z**, desplazándose paralelamente hacia la derecha en correspondencia con su crecimiento. La limitación que tendrá **Z** en su desplazamiento estará dada por la tangencia de la recta con el polígono de soluciones, que en nuestro ejemplo es el punto **B**. En ese punto la recta del funcional tiene el máximo alejamiento del origen de coordenadas **O** y **Z** toma el valor máximo. O sea que el punto **B** representa la solución óptima de nuestro problema. Sus coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ , que corresponden a la cantidad de hectáreas destinadas respectivamente al proyecto A y al proyecto B, se pueden obtener del gráfico.

Cabe expresar que existen recursos en exceso, tales como la mano de obra, agua y energía eléctrica, mientras que otros recursos se aprovechan totalmente, tales como plaguicidas, fertilizantes y capital.

Los excedentes de mano de obra, energía eléctrica y agua pueden obtenerse utilizando las respectivas ecuaciones, sustituyendo las variables  $x_1$  y  $x_2$  por los valores numéricos obtenidos; pero si bien es sencillo realizar estos cálculos, no revisten importancia con relación al objetivo buscado.

La solución obtenida es la respuesta a la evaluación de alternativas con respecto a cuál proyecto es el más conveniente y en qué cantidad se utilizarán los recursos en cada uno de ellos, para alcanzar su optimización. Esa solución es sembrar **21.430** hectáreas del proyecto **A** y **64.285** correspondientes al proyecto **B**.

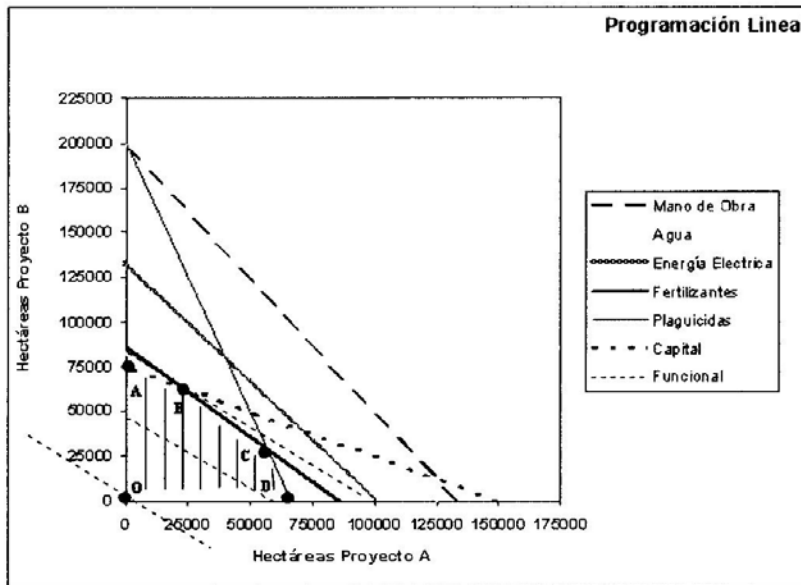


Gráfico 3. Programación Lineal – Función Objetivo

**Significado económico de las variables duales del Problema de Transporte**

Santiago Ferrari(\*)

(\*) Profesor Adjunto en la Universidad de Morón y en la Universidad Nacional de La Matanza.

Recordemos que el *Problema de Transporte* es un caso particular del modelo de *Programación Lineal*. Su enunciado es:

Dados  $m+n$  números positivos  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$  que satisfacen

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

se trata de hallar los valores de  $m \cdot n$  variables  $x_{ij}$  de manera que *minimicen*:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot c_{ij}$$

sujetas a:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i \quad ; \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j \quad ; \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad ; \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2}$$

Por ejemplo, podría tratarse del siguiente caso:

Un fabricante de láminas de polietileno posee plantas ubicadas en Munro, Morón y Adrogué. Existen 4 centros posibles de distribución, ubicados en: Vicente López, Liniers, Constitución y Pompeya. La planta de Munro puede proveer 120 toneladas del producto por semana, la de Morón 140 ton/sem y la de Adrogué, 100 ton/sem. El centro de distribución de Vicente López requiere semanalmente 100 toneladas de lámina; el de Liniers, 60 ton/sem; el de Constitución, 80 ton/sem; y, finalmente, el de Pompeya requiere 120 ton/sem.

La tabla siguiente indica el costo del flete, en decenas de pesos por tonelada del producto:

	V. López	Liniers	Constituc.	Pompeya
Munro	2,30	3,50	5,00	6,00
Morón	4,20	2,80	5,20	4,80
Adrogué	7,00	5,00	3,00	4,00

Tabla 1

¿Cuántas toneladas de polietileno debe enviarse de cada planta productora a cada centro de distribución de manera de minimizar el costo total de transporte y satisfacer la demanda?

Recordemos, asimismo, que a Munro, Morón y Adrogué se los llama *orígenes* y a V. López, Liniers, Constitución y Pompeya, *destinos*. Se dice además que dichos orígenes tienen *disponibilidades*  $a_1 = 120$ ,  $a_2 = 140$  y  $a_3 = 100$  toneladas, respectivamente; y que dichos destinos tienen *requerimientos*  $b_1 = 100$ ,  $b_2 = 60$ ,  $b_3 = 80$  y  $b_4 = 120$  toneladas, respectivamente. Por último, la Tabla 1 proporciona la matriz C que aparece en ( 2 ), y el elemento (i,j) de la matriz X del modelo representará la cantidad de producto que se enviará desde el origen i al destino j.

La solución óptima de este problema particular es:

. 100	. 20			120
	. 40		. 100	140
		. 80	. 20	100
	100	60	80	120

Tabla 2

es decir, el **mínimo costo de transporte** se obtiene cuando las 100 toneladas que requiere Vicente López son provistas por la planta de Munro; las 60 toneladas semanales que requiere Liniers son suministradas por Munro (20) y Morón (40). Las 80 toneladas que necesita Constitución son provistas íntegramente por Adrogué; y, finalmente, las 120 toneladas de Pompeya son enviadas desde Morón (100) y Adrogué (20). De acuerdo con los valores de la Tabla 1, entonces, el z óptimo es 1212, es decir, el costo mínimo de transporte será de 12.120\$/sem

Como subproducto de la solución óptima del problema original (*primal*) se obtienen los valores óptimos del problema *dual* que consiste en:

$$\text{Maximizar } w = \sum^m a_i \cdot u_i + \sum^n b_j \cdot v_j$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$$

La solución óptima dual obtenida <sup>(1)</sup> resultó:

$$\begin{aligned} u_1 &= 3,7 \\ u_2 &= 3 \\ u_3 &= 2,2 \\ v_1 &= -1,4 \\ v_2 &= -0,2 \\ v_3 &= 0,8 \\ v_4 &= 1,8 \end{aligned}$$

- (1) Recordemos que el Problema Dual de Transporte admite infinitas soluciones óptimas alternativas debido a que su Problema Primal tiene  $m+n$  ecuaciones pero el rango de la matriz de coeficientes del sistema es  $m+n-1$

Si queremos aplicar los resultados del *Análisis de Sensibilidad* en la Programación Lineal general al caso particular de Transporte, nos vamos a encontrar con que:

- Se cumple al pie de la letra lo establecido para las **variables de holgura (slack)** del Problema Dual, a saber, que las mismas representan los **costos de oportunidad** asociados a las respectivas variables reales del Problema Primal, es decir, el costo de enviar una unidad de un origen dado a un destino dado, cuando la solución óptima estipula que no debe transportarse ninguna. Por ejemplo:

$$w_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 5 - (3,7 + 0,8) = 0,5 \quad (2)$$

representa el costo de oportunidad de transportar una tonelada desde Munro (origen 1) a Constitución (destino 3).

- Se presentan dos dificultades en el caso de las **variables reales duales**, a saber:
  - No es posible la *modificación individual* de un término independiente como se hace en el problema de P.L. general, debido a la ecuación de consistencia (1).
  - Las variables reales duales no pueden representar el **valor marginal** de sus respectivas restricciones primales debido a que pueden tomar valores arbitrarios por la multiplicidad de la solución óptima.

Lo anterior no significa, sin embargo, que no podamos analizar las **variaciones de disponibilidades/requerimientos** y sus efectos sobre el costo total de transporte.

Para ello, realizaremos el siguiente razonamiento sobre la Tabla 2.

Recordemos que el primer origen es la planta de Munro, el segundo la de Morón y el tercero la de Adrogué.

Supongamos que por algún motivo la disponibilidad en la planta de Munro aumenta una tonelada. En ese caso, para que nuestra solución actual siga siendo factible, es necesario que la casilla (1,1) o la casilla (1,2) aumenten una unidad. Elegiremos esta última por no ser única en su columna. Para que la cantidad enviada a Liniers (segundo destino) siga siendo 60, como debe, será necesario disminuir en una unidad el contenido de la celda (2,2). Este último cambio se compensa si disminuimos una unidad la disponibilidad de la planta de Morón (origen 2). Gráficamente:

- (2) Obsérvese que para cualquier solución alternativa la suma  $u_1 + v_3$  siempre vale 4,5.

100	20+1			120+1
	40-1		100	140-1
		80	20	100
100	60	80	120	

Tabla 3

Con lo cual tenemos un nuevo problema con 121 toneladas en Munro y 139 en Morón (Adrogué sin cambios) y la solución factible óptima correspondiente. Si llamamos  $z^*$  al costo óptimo del problema original y  $z'$  al costo del problema modificado, tendremos

$$z' = z^* + c_{12} - c_{22}$$

y, al ser las celdas (1,2) y (2,2) básicas, resulta

$$\begin{aligned} z' &= z^* + (u_1 + v_2) - (u_2 + v_2) \\ &= z^* + u_1 - u_2 \end{aligned}$$

de modo que la variación del costo total de transporte al aumentar una tonelada la disponibilidad en Munro y decrecer una tonelada la de Morón, es igual la diferencia entre sus respectivas variables duales. Es fácil comprobar que si en lugar de disminuir la tonelada en Morón, para compensar la de Munro, se la disminuye en Adrogué, la variación del costo sería  $u_1 - u_3$ . Podemos enunciar entonces:

### Significado económico de las variables duales de transporte

Si  $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$  son la solución óptima al Problema Dual del Problema de Transporte, entonces:  
 $u_i - u_k$  es la variación en el costo total de transporte al aumentar una unidad la disponibilidad del origen  $i$  y disminuir una unidad la disponibilidad del origen  $k$ .  
 $v_j - v_r$  es la variación en el costo total de transporte al aumentar una unidad el requerimiento del destino  $j$  y disminuir una unidad el requerimiento del destino  $r$ .

La conclusión económica es que, desde el punto de vista del costo del flete, convendrá aumentar la disponibilidad de los orígenes  $i$  y disminuir la disponibilidad de los orígenes  $k$  toda vez que  $u_i - u_k$  sea negativo.

Es importante destacar que si bien  $u_i$  y  $u_k$  individualmente pueden tomar valores arbitrarios, la diferencia entre los mismos, es constante.

Respecto de los límites de las variaciones de los parámetros tales que se mantenga la estructura de la solución óptima, diremos que:

Dado que por cada unidad que aumenta la disponibilidad del primer origen, debe disminuir una unidad el contenido de la casilla (2,2), está claro que el límite superior de dicho aumento está constituido por las 40 unidades que dicha celda contiene en la solución óptima original. Con el mismo razonamiento se pueden establecer los demás límites:

$$\begin{aligned}
 -20 &\leq \Delta a_1 = -\Delta a_2 \leq 40 \\
 -20 &\leq \Delta a_1 = -\Delta a_3 \leq 20 \\
 -100 &\leq \Delta a_2 = -\Delta a_3 \leq 20
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

siendo  $\Delta a_i$  el incremento en el origen  $i$ .

Esto obviamente no significa que no se puedan seguir incrementando los orígenes *más económicos* y disminuyendo los *más caros*, sino que, como ocurre en la Programación Lineal general, traspasados los límites originales de variación, se lo hará con otros valores. Eventualmente, llega un momento en el que el beneficio marginal se anula o el problema se hace incompatible.

En nuestro caso particular, dado que tenemos:

$$u_1 - u_2 = 0,7$$

$$u_1 - u_3 = 1,5$$

$$u_2 - u_3 = 0,8$$

lo más conveniente será incrementar la disponibilidad del tercer origen y disminuir la del primero. De acuerdo con (3), el máximo cambio a ese precio (1,5) es de 20 ton, con lo cual la disminución total del costo será  $(1,5 \cdot 10) \text{ \$/ton} \cdot 20 \text{ ton} = 300\text{\$}$  (recordar que los valores de la tabla estaban dados en decenas de pesos por ton.). Efectivamente para el problema modificado tenemos la siguiente solución:

. 100	. 0			100
	. 60		. 80	140
		. 80	. 40	120
100	60	80	120	

**Tabla 4**

con un  $z$  de 1182, o sea, un costo mínimo de 11.820\$ y nuevos valores marginales, a saber:

$$u_1 - u_2 = -4,5$$

$$u_1 - u_3 = -3,7$$

$$u_2 - u_3 = 0,8$$

Esto significa que todavía podemos aumentar la disponibilidad del tercer origen –en este caso disminuyendo la del segundo– y como la cantidad permitida resultó ser 80, obtendríamos un beneficio de  $80 \cdot 0,8 \cdot 10$ , que se verifica en la siguiente solución:

. 100	.			100
	. 60		.	60
. 0	. 0	. 80	. 120	200
100	60	80	120	

Tabla 5

que tiene un costo de transporte de 11.180\$ y a la que le corresponden los siguientes valores marginales:

$$u_1 - u_2 = -4,7$$

$$u_1 - u_3 = -2,5$$

$$u_2 - u_3 = -2,2$$

Esto nos muestra que, para alivio de la gente de Munro y Morón, ya no conviene aumentar la disponibilidad de Adrogué en detrimento de aquéllas.

### Problemas históricos en la enseñanza de la probabilidad

Andrea Lavalle y Lisandro Curia (\*)

(\*) Profesores del Departamento de Estadística de la Facultad de Economía y Administración de la Universidad Nacional del Comahue.

#### Resumen:

En este trabajo se presenta un breve recuento de la historia de la probabilidad, desde los primeros juegos de azar hasta la formalización de la teoría, mencionando los autores más relevantes en su desarrollo. Por otro lado, se realizan algunas consideraciones sobre el enfoque histórico de enseñanza, tanto desde la perspectiva de la formación del profesor de matemática como del alumno del secundario. Por último, se presentan cuatro problemas históricos con su respectiva solución y comentarios acerca de su implementación en el aula y de las características didácticas de los mismos.

#### 1. Breve resumen de la historia de la probabilidad

Los juegos de azar han sido utilizados desde la prehistoria. Dentro de los descubrimientos arqueológicos de las civilizaciones sumeria y asiria, se encontraron huesos denominados astrágalos o talus, extraídos del talón de algunos animales como la oveja o el ciervo. Al lanzar un astrágalo en una superficie plana, éste puede caer de cuatro formas diferentes. De esta manera, el astrágalo se convirtió en el antecesor del dado. En la civilización egipcia, se han encontrado numerosas pinturas que datan del año 3.500 a. C., en las que aparecen tanto astrágalos como tableros para registrar resultados, con lo que se concluye acerca del uso de los mismos con fines de entretenimiento. Pero no es un juego originario de Egipto sino de las culturas griega y romana. En los juegos de mesa los antiguos egipcios empleaban palitos en lugar de dados. Se han encontrado dados de madera, hueso y marfil. Y éstos llegaron a Egipto a través del comercio y durante los Períodos Ptolomeico y Romano.

Por otro lado, es sabido que algunas civilizaciones antiguas explicaban el azar mediante la voluntad divina, y en este sentido es que los dados también fueron utilizados en ceremonias religiosas. Por ejemplo, en Grecia y Roma, se utilizaba la configuración resultante de tirar cuatro dados para predecir el futuro y

revelar la voluntad favorable o desfavorable de los dioses. Prácticas similares se han encontrado en culturas tan distintas como la tibetana, la india o la judía.

Durante el Renacimiento aparece una nueva forma de considerar el mundo en la que el abandono progresivo de las explicaciones teológicas conduce a una reconsideración de los experimentos aleatorios. A lo largo del siglo XVI aparecieron varios ejercicios sobre fenómenos aleatorios en los que se reconoce el comienzo del álgebra europea de la probabilidad. Hay dos aspectos claramente distintos de estas anticipaciones de la teoría de probabilidades: los problemas combinatorios y los problemas sobre juegos repetidos. Estos últimos conciernen a la división del pozo de un juego aún no terminado y forman parte de un gran cuerpo de problemas de división que surgen en el comercio, la mayoría de los cuales no tiene una base aleatoria (Hacking, 1995). Sin embargo, el problema de la división o reparto de la apuesta es una muestra de los intentos genuinos de aplicar la nueva álgebra a problemas de juego, entre los matemáticos italianos de los siglos XV y XVI.

El primer libro sobre juegos de azar *Liber de Ludo Aleae*, fue escrito por Cardano (1501 – 1576) alrededor de 1550, pero no fue impreso hasta 1663. Galileo (1564 – 1642) se ocupó de los juegos de azar en *Sopra le Scoperte dei Dadi*. En ambos trabajos ya aparecen de forma definida los elementos que constituyen lo que actualmente conocemos como “enfoque clásico de la probabilidad” (Vega Amaya, 2002).

A fines del siglo XVI existía un intuitivo pero preciso análisis empírico de los resultados aleatorios. El desarrollo matemático de los juegos de azar se produce lentamente durante los siglos XVI y XVII, y la mayoría de los autores considera como origen del cálculo de probabilidades la correspondencia entre Pascal (1623 – 1662) y Fermat (1601 – 1665) acerca del problema del reparto de la apuesta, propuesto a Pascal en 1654 por el Caballero de Meré (1607 – 1684). En 1657, Christian Huygens (1629 – 1695) examinó la correspondencia entre Fermat y Pascal y de ahí se publicó el primer libro sobre Teoría de Probabilidades titulado *De Rationciniis in Ludo Aleae* que contiene un tratado sobre problemas asociados con juegos de azar.

El cálculo de probabilidades se consolida como disciplina independiente en el período que transcurre desde la segunda mitad del siglo XVII hasta comienzos del siglo XVIII. Durante el siglo XVIII el cálculo de probabilidades se extiende a problemas de física y astronomía, ligados al contraste de la teoría de Newton. También incluyó los problemas actuariales y de seguros, los cuales han sido de importancia fundamental en el desarrollo de la Estadística. Al cabo de cincuenta años, muchos centros de enseñanza estaban estudiando la probabilidad como un instrumento que les permitiría entender los fenómenos sociales.

Jakob Bernoulli (1654 – 1705) publica en 1713 la obra *Ars conjectandi* donde estudia la distribución binomial y la estabilidad de las frecuencias relativas. Otros matemáticos como Abraham de Moivre (1667 – 1705), quien publicó *The doctrine of chances* en 1738, el reverendo Thomas Bayes (1702 – 1761) y Joseph Lagrange (1736 – 1813) contribuyeron con fórmulas y técnicas de cálculo de probabilidades. Cabe mencionar al naturalista Georges L. Leclerc de Bufón (1707 – 1788), quien planteó el famoso experimento que lleva su nombre, que consiste en representar el lanzamiento de una aguja sobre una red de paralelas.

En 1812, Laplace (1749 – 1827) publica su famosa *Theorie Analytique des probabilités* que contiene una exposición completa y sistemática de la teoría matemática de los juegos de azar, además de una gran cantidad de aplicaciones. Por su parte, Gauss (1777 – 1855) hizo su aportación en la estimación de modelos estadísticos y en la construcción de la ley normal. Gauss y Laplace, independientemente, aplicaron la teoría de la probabilidad al análisis de los errores de medida en las observaciones físicas y astronómicas. Otro matemático que realizó grandes aportes en la construcción de la teoría de la probabilidad fue S. Poisson (1781 – 1842), quien escribió acerca de la distinción entre probabilidad subjetiva y objetiva y estudió el comportamiento de fenómenos que ocurren en períodos de tiempo, llegando a formular el modelo que lleva su nombre y la aproximación del mismo al modelo normal.

En 1894, Karl Pearson (1857 – 1936) analizó un gran número de resultados de una determinada ruleta no justa (con distribución no uniforme) y planteó los Métodos de Casinos. Pearson sugirió utilizar los casinos como un laboratorio de teoría de probabilidades y realizar experimentos en ellos; esto condujo a Pearson a descubrir la prueba Chi-Cuadrada. Para los experimentos que sugería Pearson se requerían números aleatorios. Años más tarde, Von Neumann (1903 – 1957) plantea el uso de los métodos de Pearson pero utilizando números aleatorios en combinación con funciones de distribución para simular procesos, naciendo así los famosos Métodos Monte Carlo aplicados hasta la fecha. Se distingue también la contribución de Francis Galton (1822 – 1911) sobre regresión y correlación lineal y de Ronald Fisher en el diseño experimental. Por otro lado, Emile Borel (1871 – 1956) y Henri Lebesgue (1875 – 1941) desarrollaron

la base matemática para la axiomatización de la teoría de probabilidad mediante la teoría matemática de la medida.

En 1933, un matemático ruso, A. Kolmogorov (1903 – 1987) desarrolló un enfoque axiomático de la Teoría de Probabilidad en su libro traducido al inglés, en 1950, *Foundations of Probability Theory*. Por su parte H. Cramér (1893 – 1985) estudió las variables aleatorias y su distribución de probabilidad. En los años siguientes el estudio de la probabilidad se centró en los procesos estocásticos y los problemas límites. Algunos de los autores relevantes son Andreï Markov (1856 – 1922), Paul Levy (1886 – 1971) y William Feller (1906 – 1970), entre otros.

A partir de los años 70, la Teoría de Probabilidad se enseña, por lo general, como parte de todas las carreras profesionales vigentes hoy en día y su conocimiento se exige prácticamente en todos los estudios de postgrado de ingeniería y ciencias sociales (C.T. Monterrey).

## 2. La historia de la matemática en el proceso de formación del profesor

Una de las recomendaciones acerca de la formación de los profesores de matemática es la referida a la inclusión de la perspectiva histórica. Según Miguel de Guzmán, “un cierto conocimiento de la historia de la matemática, debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de cualquier nivel, primario, secundario o terciario, en particular. Y, en el caso de este último, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino primariamente porque la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática, de lo cual suele estar también el matemático muy necesitado”.

El conocimiento de la historia proporciona una visión dinámica de la evolución de la matemática. Con ella es posible relacionar cada tópico con una cierta problemática de un momento histórico determinado, con sus circunstancias sociales y políticas y con implicancias tanto dentro de la misma matemática como de otras ciencias. Es decir, en algún momento el tema en cuestión ha sido objeto de discusiones, controversias, búsquedas y hallazgos, cuyo conocimiento aporta riqueza al conocimiento matemático en sí mismo.

El profesor que conoce la historia de la matemática podrá comprender mejor las dificultades por las que tuvo que pasar la humanidad en la elaboración de los conceptos y podrá encontrar en la historia una motivación para sus alumnos. Esta visión le permitiría incorporar tareas interesantes en el trabajo educativo, como la posibilidad de extrapolación hacia el futuro y de inmersión creativa en las dificultades del pasado (Miguel de Guzmán).

## 3. La historia de la matemática en la clase de matemática

“El enfoque histórico es una propuesta metodológica que tiene como objetivo principal despertar y motivar el interés del alumno hacia el estudio de una ciencia. Generalmente se

utiliza como complemento de los otros enfoques y consiste en mostrar cómo se han ido desarrollando los conceptos, quiénes intervinieron en su desarrollo y, si es posible, determinar las dificultades encontradas” (Alemán, 1999).

La historia de la matemática se puede y se debe utilizar en el aula con el propósito de entender y hacer comprender una idea difícil del modo más adecuado. Unido a esto, es útil resaltar los méritos de los pensadores que han colaborado en el desarrollo de una idea, algunos de ellos provenientes de otras disciplinas y no de la misma matemática.

Según Miguel de Guzmán, la historia debería ser un potente auxiliar para objetivos tales como:

- hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemática
- enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas y problemas, junto con su motivación
- señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente
- apuntar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes.

Algunas sugerencias de cómo podemos complementar la enseñanza tradicional con el enfoque histórico se refieren a la inclusión de minilecturas que luego sean discutidas en el aula, a la presentación anecdótica o la confección de láminas que relacionen rostros, nombres, fechas, símbolos y conceptos matemáticos. Otra estrategia es proponerle al estudiante la solución de problemas históricos. Si los

problemas son adecuados para el nivel de razonamiento de los estudiantes, la incorporación del problema y su contexto junto con el conocimiento de los hombres que encontraron su solución, permite no sólo el estudio del contenido propiamente dicho sino que también proporciona un panorama acerca del desarrollo de la ciencia.

#### 4. Problemas históricos sobre probabilidad

Los cuatro problemas presentados a continuación fueron elegidos tanto por el interés que provocaron en un determinado momento histórico como por su facilidad de implementación en el aula. Para cada uno de ellos se realiza un análisis didáctico.

1. *En la época de Galileo (1564-1642) era de actualidad el juego de dados llamado "pasadiez". El juego consiste en lanzar tres dados a la vez y sumar los puntos resultantes; el jugador gana si esta suma resulta superior a diez y pierde en caso contrario.*

a) *¿Es equitativo este juego?*

**Un aficionado al juego, que además era un fino observador, acudió a Galileo al no poder explicar un hecho que lo extrañaba: en la suma de los puntos de los tres dados, el número 11 salía con más frecuencia que el 12 y el 10 con más frecuencia que el 9, a pesar de que todos estos números pueden obtenerse como resultado de 6 combinaciones distintas.**

b) *¿Cuáles son las combinaciones a que hace referencia el aficionado?*

c) *¿Cómo explicaría este hecho?*

Este problema fue extraído del libro *La probabilidad y sus aplicaciones* (Santaló, 1955) en el que el autor cita la fuente original: *Considerazione sopra il giuco dei dadi*, Le Opere di Galileo Galilei, Vol. XIV, Firenze, 1855.

#### Análisis del problema:

Para comprobar que la probabilidad de ganar es la misma que la de perder, es posible razonar de la siguiente manera: los puntos situados en las caras opuestas de un dado suman siempre 7, por lo tanto, en cualquier posición que queden los dados, la suma de los puntos de las caras superiores más los de las caras inferiores es siempre  $7 \cdot 3 = 21$ . Entonces si la suma de los puntos de las caras superiores es superior a 10, la suma de los puntos de las caras inferiores es inferior a 10, es decir, a cada caso favorable corresponde un caso no favorable.

El análisis de los incisos b) y c) requiere la enumeración de casos.

Tabla 1: Juego del "pasadiez". Enumeración de casos.

SUMA 9		SUMA 10		SUMA 11		SUMA 12	
Combinaciones	Casos	Combinaciones	Casos	Combinaciones	Casos	Combinaciones	Casos
1-2-6	6	1-3-6	6	1-4-6	6	1-5-6	6
1-3-5	6	1-4-5	6	1-5-5	3	2-4-6	6
1-4-4	3	2-2-6	3	2-3-6	6	2-5-5	3
2-2-5	3	2-3-5	6	2-4-5	6	3-3-6	3
2-3-4	6	2-4-4	3	3-3-5	3	3-4-5	6
3-3-3	1	3-3-4	3	3-4-4	3	4-4-4	1
Total:	25	Total:	27	Total:	27	Total:	25

El observador tiene razón al afirmar que las combinaciones posibles para cada suma son 6. Lo que no está considerando son las diferentes maneras de obtener esas combinaciones (casos). Es decir, las combinaciones no son igualmente probables. Realizando el cociente (casos favorables sobre casos posibles) se pueden calcular las probabilidades:

$$P(\text{suma } 9) = P(\text{suma } 12) = \frac{25}{216} = 0,1157$$

$$P(\text{suma } 10) = P(\text{suma } 11) = \frac{27}{216} = 0,125$$

Santaló comenta respecto a este problema: “lo notable del caso es que, siendo la diferencia entre las dos probabilidades únicamente de una centésima, ella fuese, sin embargo, apreciada experimentalmente por un jugador, lo que prueba tanto la exactitud del teorema de Bernoulli como la precisión que se alcanza en estas cuestiones mediante una práctica continuada y un agudo temperamento observador”.

Un juego clásico utilizado en la enseñanza en el nivel medio y que deriva de éste es el “pasa siete” (Crippa et al, 1998). El mismo consiste en tirar dos dados y sumar los puntos obtenidos en las caras. Si la suma es mayor que siete el tirador gana, si es menor que siete pierde y si suma siete se anula la tirada.

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

Figura 1: Esquema para representar los valores obtenidos en el “pasa siete”

Los conceptos que permite abordar este problema son: experimento y suceso aleatorio, espacio muestra, frecuencia absoluta y relativa, sucesos equiprobables, regla de Laplace, comparación de la probabilidad de ganar y perder.

Por otra parte, el problema muestra que aún antes del desarrollo de la teoría de probabilidades, los juegos de azar y sus reglas y la ventaja o desventaja del juego ya eran temas de interés para el común de la gente.

2. *En la historia de la matemática hay problemas que ilustran de forma especial las dificultades que los matemáticos han encontrado al construir una nueva teoría. Uno de esos problemas es el del reparto de la apuesta o del juego interrumpido, el cual es conocido desde el Renacimiento y su formulación general es la siguiente: Dos jugadores compiten por un premio que es otorgado después de que uno de ellos haya ganado  $n$  lances en un juego. El jugador A ha ganado más que el jugador B y, debido a alguna intervención externa, deben abandonar el juego antes de llegar al número  $n$ . ¿Cómo debe dividirse la apuesta entre los jugadores?*

### Análisis del problema

Este problema ha creado grandes controversias a lo largo de la historia. Lo que sigue es una descripción de las diferentes propuestas de solución detalladas en el artículo *Historia de un problema: el reparto de la apuesta* (García Cruz, 2000).

El primer matemático conocido que aborda este problema es Fra Luca Pacioli (1494). La versión a la que se refiere es la siguiente: “Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 puntos para ganar el juego. La apuesta es de 22 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando queda con 50 puntos y el otro con 30. Se quiere saber qué participación del dinero del premio le corresponde a cada bando”. La solución dada por Pacioli parte del principio de que la apuesta debe dividirse de acuerdo con los puntos anotados por cada bando en el momento en que el juego se interrumpe. Pacioli considera que se trata de un simple problema aritmético de reparto proporcional sobre la base de los puntos ganados. Como la apuesta es de 22 ducados, según este reparto al bando con ventaja le corresponden 13 más  $\frac{3}{4}$  de ducados y al otro le corresponden 8 más  $\frac{1}{4}$  de ducados.

El siguiente matemático que abordó el problema fue Tartaglia (1556). El enunciado utilizado es el siguiente: “En una partida a 60 puntos, A ha ganado 50 y B ha ganado 30. ¿Cómo debería dividirse la apuesta si cada jugador ha colocado 22 ducados?” Tartaglia llega a la conclusión de que el jugador que lleva ventaja recibe su apuesta más la parte del remanente proporcional a su ventaja.

$$\text{Ventaja: } 50 - 30 = 20 \Rightarrow \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

$$\text{El que va ganando recibe } 22 + \frac{1}{3} \cdot 22 = 29 \frac{1}{3}$$

$$\text{El que va perdiendo recibe } 22 - \frac{1}{3} \cdot 22 = 14 \frac{2}{3}$$

Esto equivale a dividir el total de la apuesta como 2:1 para el jugador que lleva ventaja.

Cardano (1539) fue el primero en incluir lo incierto en el análisis. Critica la solución dada por Pacioli y observa que no se ha tenido en cuenta el número de juegos que a cada jugador le quedan por ganar, en el supuesto caso en que el juego continuase. Si bien no llega a una solución correcta, señala una nueva dirección para abordarlo.

En la correspondencia entre Fermat y Pascal (1654) se encuentran las soluciones propuestas por estos matemáticos. Pascal considera que el juego consiste en ganar 3 puntos. En el momento de suspender el juego A gana a B por 2 a 1. Las probabilidades de ganar son  $p = q = \frac{1}{2}$  y la apuesta es de 32 monedas cada uno. Suponiendo que el juego se sigue, si el primero gana, ganará el total de la apuesta, es decir, 64 monedas. Pero si gana el otro, estarán 2 a 2 y si se acabara allí el juego, cada uno se lleva su apuesta. Por lo tanto, el primero tiene aseguradas 32 monedas. Para las 32 restantes el riesgo de ganar o perder es el mismo, por lo que pueden repartirse mitad cada uno. Con este razonamiento, el reparto se hará en la proporción 3:1.

Por último, es Huygens quien explica el problema del reparto de la apuesta. Su trabajo *De ratiociniis in ludo aleae* (521-534) consta de catorce proposiciones. En las tres primeras establece los primeros conceptos de esperanza matemática, bajo el nombre de *expectatio*. En la cuarta se refiere al reparto de la apuesta utilizando el enunciado que formula Pascal. Su argumento es el siguiente: debemos considerar qué ocurriría si el juego hubiera continuado. Si el que tiene ventaja gana, se acaba el juego y se lleva el total, al que llama  $a$ . Pero si pierde, las posibilidades son iguales a partir de ese momento, por lo tanto cada uno podrá reclamar  $\frac{a}{2}$ . Como existe la misma posibilidad de ganar o perder en esta supuesta jugada, el jugador

con ventaja tiene iguales posibilidades de conseguir  $a$  o  $\frac{a}{2}$ . Por lo tanto, mediante el cálculo de la esperanza, concluye que el que tiene ventaja recibe  $\frac{3a}{4}$  y el otro jugador recibe  $\frac{a}{4}$ . El cálculo que utiliza es el que enuncia en su primera proposición: “si puedo obtener igual de fácil  $a$  o  $b$ , entonces mi *expectatio* es  $\frac{a+b}{2}$ ”.

Este argumento propone una repartición de la forma 3:1 como la solución de Pascal, pero introduce un nuevo concepto, el de esperanza, por primera vez en la historia de la matemática.

En la puesta en práctica se recomienda utilizar el enunciado de Pascal y Huygens. Para que se introduzca la idea de que el azar interviene en el juego, es posible aclarar que se cuenta con algún artefacto aleatorio que asegura la equidad de los lances. Las respuestas más habituales son del tipo aritmético (Pacioli, Tartaglia). Esto resulta un obstáculo difícil de superar ya que es necesario ponerse en el lugar del que va perdiendo y argumentar que podría haber ganado para que los alumnos consideren que puede haber otras soluciones. Además, se puede introducir la historia en este momento y contar a los alumnos sobre la correspondencia de Fermat y Pascal.

Finalmente se construye el diagrama siguiente:

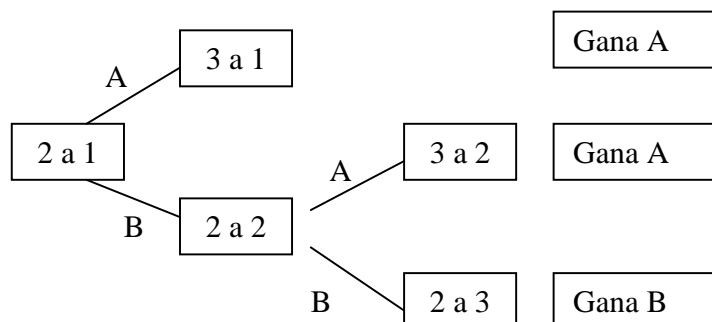


Figura 2: Árbol de probabilidad correspondiente al problema del reparto de la apuesta

Uno de los errores más comunes detectados en el uso de diagramas de árbol es el cálculo bajo el supuesto de equiprobabilidad. Otro error consiste en sumar las probabilidades que se sitúan en ramas sucesivas en vez de multiplicarlas.

El desarrollo histórico de este problema con sus diferentes propuestas de solución permite contextualizar las dificultades, controversias y discusiones que los matemáticos enfrentaron en pos de una solución. Los alumnos que pasan por estas dificultades pueden apreciar la búsqueda, la reflexión y el espíritu que caracteriza el trabajo científico.

Los conceptos que se pueden abarcar con este problema: espacio muestral, regla de Laplace, diagrama de árbol, juego equitativo y esperanza matemática, constituyen elementos importantes en la conceptualización del azar.

3. *El problema del sombrero: En un sombrero hay 12 fichas, 4 blancas y 8 negras. Tres jugadores, A, B y C, por turnos, extraen una ficha del sombrero. El ganador es aquel que extraiga una ficha blanca.*

Este problema fue extraído de *Probabilidad e Inferencia estadística* (García Cruz, 1998) en el que el autor cita la fuente original: *De ratiotinio en alea ludo*, Christian Huygens (1657).

#### Análisis del problema

Este problema permite dos enfoques diferentes: extracciones sin reposición o extracciones con reposición. Si se elige el primer enfoque, se puede realizar un diagrama de árbol y completar las ramas con las probabilidades correspondientes. En este caso, las probabilidades son condicionales pero si los alumnos conocen la definición clásica de probabilidad, resulta sencillo calcular estas probabilidades condicionales pensando, en cada nivel del árbol, cuántas bolas blancas y cuántas bolas negras quedan en el sombrero.

Utilizando la regla del producto se calculan las probabilidades para cada jugador. Como no se indica el orden de extracción se consideran primero, segundo y tercero, sin identificar a cada jugador:

$$P(\text{gana el que extrae primero}) = \frac{4}{12} + \frac{8}{12} \frac{7}{11} \frac{6}{10} \frac{4}{9} + \frac{8}{12} \frac{7}{11} \frac{6}{10} \frac{5}{9} \frac{4}{8} \frac{3}{7} \frac{4}{6} = \frac{7}{15} = \frac{77}{165}$$

$$P(\text{gana el que extrae segundo}) = \frac{8}{12} \frac{4}{11} + \frac{8}{12} \frac{7}{11} \frac{6}{10} \frac{5}{9} \frac{4}{8} + \frac{8}{12} \frac{7}{11} \frac{6}{10} \frac{5}{9} \frac{4}{8} \frac{3}{7} \frac{2}{6} \frac{4}{5} = \frac{56}{165}$$

$$P(\text{gana el que extrae tercero}) = \frac{8}{12} \frac{7}{11} \frac{4}{10} + \frac{8}{12} \frac{7}{11} \frac{6}{10} \frac{5}{9} \frac{4}{8} \frac{4}{7} + \frac{8}{12} \frac{7}{11} \frac{6}{10} \frac{5}{9} \frac{4}{8} \frac{3}{7} \frac{2}{6} \frac{1}{5} = \frac{7}{33} = \frac{35}{165}$$

Por lo tanto la razón entre las posibilidades es 77: 56: 35, en orden de extracción. Existe ventaja para el que extrae primero.

Si se elige el segundo enfoque, el árbol es infinito. En este caso la representación con el árbol de probabilidades no es adecuada. Para la resolución de este problema, se necesitan además conocimientos más avanzados. Por ejemplo, se puede resolver mediante series:

$$P(\text{gana el que extrae primero}) = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^6 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^9 \frac{1}{3} + \dots$$

Esta expresión corresponde a una serie geométrica de razón  $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ . Como la razón es menor que

uno, la serie es convergente y su suma es:  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{81}{171}$

$$P(\text{gana el que extrae segundo}) = \frac{2}{3} \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^6 \frac{1}{3} + \dots = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \left[ \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3} \right] = \frac{62}{171}$$

$$P(\text{gana el que extrae tercero}) = 1 - \left( \frac{81}{171} + \frac{62}{171} \right) = \frac{28}{171}$$

La razón entre las posibilidades es 81: 62: 28, siempre con ventaja para el primero.

4. ¿Qué es más probable: obtener al menos un seis en cuatro lanzamientos de un dado, u obtener al menos un doble seis en 24 lanzamientos de dos dados?

Análisis del problema

Para analizar este problema se transcribe parte de la correspondencia de Pascal a Fermat (*Oeuvres de Fermat*, tomo II, pág. 296. Carta de Pascal a Fermat del 29 de Julio de 1654) citada por Santaló (1955):

*“No tengo tiempo de enviarle la demostración de una dificultad que asombraba grandemente al señor de Meré, pues él es un fino espíritu pero no es geómetra (lo cual, como usted sabe, es un gran defecto) y ni tan sólo comprende que una línea matemática sea divisible hasta el infinito y cree entender que ella está compuesta de puntos en número finito y jamás le he podido sacar de aquí. Si usted lograra hacerlo, lo haría perfecto. Él me decía, pues, que había encontrado falsedad en los números por la siguiente razón: Si uno acepta de sacar 6 con un dado, hay ventaja en aceptar por cuatro jugadas como 671 es a 625. Si uno acepta de hacer sonos (sacar dos 6 de una vez) con dos dados, hay desventaja en aceptar por 24 jugadas. Sin embargo, 24 es a 36 (que es el número de posibilidades con los dos dados) como 4 es a 6 (que es el número de posibilidades con un solo dado).*

*He aquí lo que constituía su gran escándalo, que le hacía decir en voz alta que las proporciones no eran constantes y que la aritmética se contradecía; pero verá usted fácilmente la razón por los principios que usted está trabajando”.*

Es interesante que los alumnos lean y analicen el texto ya que se pueden observar las apreciaciones del autor sobre la importancia del conocimiento matemático en frases como: *“no es geómetra, lo cual como usted sabe, es un gran defecto”*; *“ni tan solo comprende que una línea matemática sea divisible hasta el infinito...”*. También es relevante preguntar a los alumnos qué entienden por *“falsedad en los números”* y cuál es entonces la *contradicción* en que entra la aritmética, según el caballero de Meré.

Para analizar la deducción hecha por el caballero, es necesario interpretar el texto, el cual está escrito de manera poco conocida por los alumnos. La comparación que hace se refiere a sacar un seis en cuatro tiradas sucesivas de un dado con sacar dos seis en veinticuatro tiradas sucesivas de dos dados. Si bien no se aclara la forma en que el caballero de Meré estimó las probabilidades para realizar la comparación, es sencillo calcularlas con la ayuda de las probabilidades:

• Si se lanza un dado, la probabilidad de no sacar un seis es  $\frac{5}{6}$ . La probabilidad de no sacar 6 en cuatro lanzamientos es  $\left(\frac{5}{6}\right)^4$ , ya que los lanzamientos son independientes. Por lo tanto, la probabilidad de sacar “por lo menos un 6” en cuatro lanzamientos es:

•  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296}$  y la razón entre ambas probabilidades es  $\frac{671}{625} = 1.0736$ . Se observa que hay ventaja ya que la probabilidad de que el hecho ocurra es superior a la de que no ocurra.

• Si se lanzan dos dados, la probabilidad de no sacar doble seis es  $\frac{35}{36}$ . La probabilidad de no sacar doble seis en 24 lanzamientos es  $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ . Por lo tanto, la probabilidad de sacar “por lo menos una vez doble seis en 24 lanzamientos” es  $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$  y la razón entre ambas probabilidades es 0.966166. Aquí se observa que el juego es desventajoso ya que la probabilidad de que el hecho no ocurra es superior a la de que ocurra.

Para completar el análisis de las afirmaciones del caballero de Meré, observemos el razonamiento proporcional que ha utilizado. Las proporciones que compara son  $\frac{\text{número de jugadas}}{\text{casos posibles}}$ . De esta forma, en el

lanzamiento de un solo dado se obtiene:  $\frac{4 \text{ jugadas}}{6 \text{ resultados posibles}}$  y en el lanzamiento de dos dados se obtiene:

$\frac{24 \text{ jugadas}}{36 \text{ resultados posibles}}$ . La comparación realizada es correcta ya que  $\frac{4}{6} = \frac{24}{36}$ , el error está en aplicar un razonamiento proporcional en un problema en el que es necesario el cálculo de probabilidades.

La aplicación del razonamiento proporcional es un error frecuente en el cálculo de probabilidades. Si bien los estudios realizados desde la perspectiva de la psicología genética de Piaget, indican la necesidad de comprensión del razonamiento proporcional para iniciar a un alumno en el cálculo de probabilidades, en la práctica se observa que el razonamiento proporcional aparece muy arraigado en los estudiantes en el momento de introducir la probabilidad y les resulta difícil incluir un nuevo tipo de razonamiento en la resolución de problemas. Otros autores como Fischbein, recomiendan la inclusión del razonamiento probabilístico desde edades más tempranas, con el fin de generar en los alumnos intuiciones probabilísticas correctas y evitar errores o confusiones en el uso de ambos tipos de razonamiento.

### **Bibliografía**

- ALEMÁN, Ángela (1999). *El enfoque histórico en la enseñanza de la matemática*. <http://www.utp.ac.pa/articulos/matematica.html>
- Centro Tecnológico de Monterrey – Campus Cuernavaca. *Historia de la teoría de la probabilidad*. <http://w3.mor.itesm.mx/~logica/logyprob/page3.html>
- CRIPPA A., ARIAS MERCADER M., MARCOS G. (1998). *Combinatoria, estadística y probabilidad en la EGB*. El Ateneo. Buenos Aires.
- de GUZMÁN, Miguel. *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática – Tendencias e Innovaciones*. [www.capus-oei.org](http://www.capus-oei.org)
- GARCÍA CRUZ, Juan A. (2000). *Historia de un problema: el reparto de la apuesta*. Revista Suma N° 33, 25-36. Universidad de Zaragoza.

- GARCÍA CRUZ, Juan A. (1998). *Probabilidad e Inferencia Estadística*. Cuadernillo del Seminario Internacional de la Olimpiada Matemática Argentina. Mar del Plata.
- HACKING, Ian (1995). *El surgimiento de la probabilidad*. Editorial Gedisa. Barcelona. España.
- PICHARD, Jean-Francois (1997). *Frise historique sur la probabilité et la statistique*. En Enseigner les probabilités au lycée. Edición: IREM de Reims.
- SANTALÓ, Luis (1955). *La probabilidad y sus aplicaciones*. Editorial Ibero Americana. Buenos Aires.
- VEGA – AMAYA, Oscar (2002). *Surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad*. Apuntes de historia de las matemáticas. Vol. 1 N° 1. [fractus.mat.uson.mx/~tedi/apuntes/vega\\_v1\\_n1.pdf](http://fractus.mat.uson.mx/~tedi/apuntes/vega_v1_n1.pdf)